Mátrixalgebra
Optimumszámítás

Ábrahám István

Mátrixalgebra
Optimumszámítás

Egyszerűen, érthetően

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap

Lektorálta: Kocsis Péter főiskolai adjunktus

ISBN 978 963 279 677 2

Témakör: *matematika*

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról
a *www.typotex.hu* és a *facebook.com/typotexkiado*
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Főszerkesztő: Horváth Balázs
Műszaki szerkesztő: Csépány Gergely
A szöveget gondozta: Marsi Mónika
Borítóterv: Szalay Éva
Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában
Felelős vezető: Kajtor István

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A bennünket körülvevő világ leírásához ősidők óta számokat is alkalmazunk. Tekintsük át a számfogalom kiépülésének logikai-történeti folyamatát, amely minden valószínűség szerint a legkorábban megjelent természetes számoktól a törtek, a negatív számok, majd az irracionális számok alkalmazásáig vezetett, illetve további általánosítással megjelentek a komplex számok, a vektorok és a mátrixok.

A természetes számok körében az **összeadást** tekinthetjük úgy, mint ismételt továbbszámlálást: ha bármely természetes számhoz egyet hozzáadunk, újabb természetes számot kapunk. Ez azt is jelenti, hogy minden természetes szám egyesek összegéből áll. Ha tehát az **a** természetes számhoz hozzáadjuk a **b** természetes számot, akkor a b-ben lévő egyesekkel ismételt továbbszámlálást végzünk, azaz újabb természetes számot kapunk: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, ahol $\mathbf{c}\in\mathbf{N}$, a művelet nem vezet ki a természetes számok **N** halmazából.

A természetes számok körében a kéttényezős szorzás ismételt összeadás: az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ azt jelenti, hogy b darab a-t adunk össze, vagy ami ugyanaz: a darab b-t adunk össze. Az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{d}$ szorzat eredménye is mindig természetes szám: $\mathbf{d}\in\mathbf{N}$.

Közben láthattuk, hogy mind az összeadás, mind a szorzás **kommutatív**, azaz $a+b=b+a$, valamint $a\cdot b=b\cdot a$. Mindkét direkt művelet tetszőlegesen sok tagra megismételhető, azaz érvényes az **asszociatív** tulajdonság: $a+b+$ $+c=(a+b)+c$, illetve igaz: $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c$, tehát először mindig csak két tagot-tényezőt adunk egymáshoz, szorzunk össze. A két műveletre együtt érvényes a **disztributív** azonosság („részekre bontás, szétosztás”):
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Az azonos tényezőkkel ismételt szorzás a hatványozás: ha b darab a-t szorzunk össze, akkor hatványt kapunk: $a\cdot a\cdot\cdots\cdot a=a^b=c$. (Az a az alap, b a kitevő, c a hatványérték. Nyilván: $c\in N$.) A kommutativitás ebben az esetben általában nem igaz, azaz: $a^b\neq b^a$. Például $2^3=8\neq 3^2=9$. A hatványozás egyszerű azonosságait az „ismételt szorzás” definícióval könnyű belátni: 1.) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$; 2.) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; 3.) $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$. A harmadik azonosság igen érdekes: ismételt hatványozással nem kapunk új műveletet, megint hatvány lesz az eredmény. Például $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

Az eddig felsorolt „direkt” műveletekben, ha természetes számokból indulunk ki, az eredmény is természetes szám lesz. Új típusú számokhoz akkor jutunk, ha a műveletben szereplő két tag-tényező közül az egyiket, valamint az eredményt ismerjük, és keressük a műveletben szereplő másik számot, azaz indirekt műveletet végzünk. *Összeadás esetén:* az $a + x = c$-ből az ismeretlen szám *kivonással* adódik: $x = c - a$. Ha a és c természetes számok, akkor a különbség nem lesz mindig az. Ha azt akarjuk, hogy a kivonás minden természetes számra elvégezhető legyen, be kell vezetni a negatív számokat, így a kivonásra az alaphalmaz az egész számok Z halmaza: $Z = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Megjegyezzük, hogy elég hosszú idő kellett ahhoz, hogy a negatív számok elfogadottakká váljanak, a létjogosultságukat alapvetően a velük való, alapvetően egyszerű számolási lehetőség biztosítja. Láttuk, hogy az összeadás kommutatív, így mindegy, hogy az eredmény ismerete mellett az összeadandó két tag közül az első vagy a második adott, a kivonást egyféleképpen végezzük el.

Szorzás esetén: az $a \cdot x = c$-ből az ismeretlen osztással adódik (ha az a nem nulla), tehát: $x = c/a$. Nyilvánvaló, hogy ha az a és a c egész számok, akkor a hányadosuk nem lesz mindig egész. Ha azt akarjuk, hogy az osztás minden egész számra elvégezhető legyen, be kell vezetni a tört számokat, így az osztásra az alaphalmaz a racionális számok (két egész szám hányadosaként felírható számok) Q halmaza, azaz: $Q = \{x|x = p/q$, ahol p és q egész számok, és $q \neq 0\}$. A szorzás is kommutatív, így mindegy, hogy az eredmény ismerete mellett a két tényező közül az első vagy a második adott, az osztást egyféleképpen végezzük el.

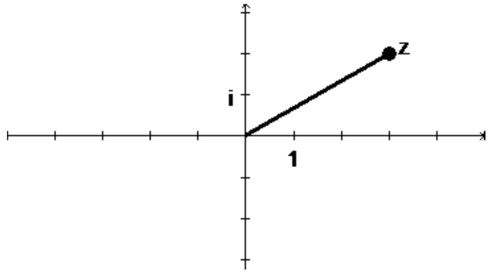
A hatványozás esetén bonyolultabb a helyzet az indirekt művelettel. A hatványozás nem kommutatív, így ha az eredményt, a hatványértéket ismerjük, akkor egészen más műveletet kell végezni, ha az alap adott és a kitevőt keressük (logaritmálás), illetve, ha a kitevő adott és az alapot keressük (gyökvonás). Például $2^x = 64$-ből $x = 6$, amit, tudjuk, így is írhatunk: $\log_2 64 = 6$. Viszont az $x^2 = 64$-ből $x = \pm 8$, aminek szintén ismert az x-re kifejezett (explicit) alakja: $x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$. Mind a kitevőkeresés, mind a gyökvonás elvégezhetőségéhez új típusú számokat kell bevezetnünk, a nem szakaszos végtelen tizedes törteket, az irracionális számokat. Bebizonyítható, hogy például a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, azaz szakaszos tizedes törtként. Sokáig ezt a tényt ésszerűtlennek, irracionálisnak tartották. Úgy képzelték, hogy minden tizedes tört egyszer majd csak szakaszos lesz, ha elég hosszú a szakasz. Egyszerű ellenpéldát találni: a $0,1001000100001\ldots$ szám (azaz ha az egyesek közé jobbra haladva mindig eggyel több nullát írunk) soha nem lesz szakaszos tizedes tört, ez egy irracionális szám. Ugyanakkor ezek a számok racionálisan nem elképzelhetetlenek, például az 1 cm oldalhosszúságú négyzet átlója $\sqrt{2}$ cm. Az irracionális számok is a számegyenesen ábrázolhatók, és a racionális számokkal együtt alkotják a valós számok R halmazát.

De a valós számok sem elegendők arra, hogy a hatványozás inverz műveleteit minden esetben végre tudjuk hajtani. Gondoljunk például az $x^2-2x+5=0$ egyenlet megoldására. Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=1\pm\sqrt{-4}.$$

A valós számok körében ennek a másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen olyan valós szám, amelynek a négyzete –4 lenne, nem létezik. Vezessünk be egy „képzetes” (immaginárius) számot, amelynek a négyzete –1, és ezt jelöljük i-vel. Ekkor a $\sqrt{-4}$ így írható: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$. A másodfokú egyenletünknek így már van megoldása: $x_{1,2}=1\pm 2i$, tehát az egyik gyök: $x_1=1+2i$, a másik: $x_2=1-2i$. A számfogalomnak ezzel a bővítésével a gyökvonás bármilyen valós számból elvégezhető, a másodfokú egyenleteknek mindig van megoldása. Az így adódó számokat **komplex számoknak** nevezzük. Gauss (1777–1855) vezette be és használta először a komplex számokat, amelyek általános alakja: $z=a+b\cdot i$, ahol a és b valós számok.

Megjegyzés: felvetődik a kérdés, hogy mire jó mindez, hogyan tudjuk elképzelni a komplex számokat? Gondoljunk arra, hogy kezdetben a negatív számokat is csak mesterkélten („hiány”, a számegyenesen a nullától balra lévő számok, stb.) magyarázták, vagy az irracionális számokat ma is ezen a néven nevezzük (lexikon: irracionális = az értelem számára felfoghatatlan, észellenes.). Ma már ezeket a számokat az általános iskolákban is használják. A komplex számok mai, eléggé széles körű alkalmazási területei a matematikán kívül főként a műszaki tudományokban találhatók. Elképzelni pedig úgy lehet a komplex számokat, hogy azok nem a számegyenesen, hanem egy ún. számsíkon helyezkednek el, amelyen adott egy vízszintes tengely, amin a valós számok találhatók, a függőleges tengely egysége pedig az i imaginárius szám:



A rajzunkon a $z = 3 + 2i$ komplex számot ábrázoltuk.

A $z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ komplex számban az a-t tehát mindig eggyel, a b-t pedig mindig i-vel szorozzuk, ezért a komplex szám megadásakor elegendő az a-t és a b-t feltüntetni, tehát egy valós számpárral adjuk meg a komplex számot: $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$. Így a számfogalom újabb általánosításaként olyan „számot” kapunk, amely 2 valós számmal adható meg. A komplex számokkal is műveleteket lehet végezni, a műveleteknek azonosságaik vannak, ezeket nem részletezzük.

A valóságban a dolgok mennyiségi jellemzésére régóta használnak több számból álló számsorokat, számoszlopokat. Gondoljunk például arra, hogy egy egészségügyi vizsgálatkor általában megmérik az illető testsúlyát, magasságát, vérnyomását, hőmérsékletét és egyebeket és ez a számsor (vektor) fejezi ki az a vizsgált személy állapotát. Tágabb értelemben tehát ez a mennyiségi adat is „számszerű”, a több emberről felvett hasonló adatokkal (vektorokkal) műveleteket lehet végezni, ezekre a műveletekre bizonyos szabályok, azonosságok lehetnek érvényesek.

Tovább mehetünk: a mennyiségi adatok gyakran nemcsak számsorokban, vektorokkal, hanem táblázatokban adottak. Vannak olyan jelenségek, eljárások, amelyek kvantitatív megadásához a vektor kevés. Például tekintsünk egy egyszerű termelési folyamatot, ahol 3 erőforrás (ami lehet élőmunka, anyag és energia) felhasználásával négyféle terméket gyártanak. Ismeretes a technológiai szerkezet, ami azt jelenti, hogy az egy-egy darab termékekbe az erőforrásokból mennyi épül be. Konkrétan: jelöljük az erőforrásokat A, B és C betűkkel, a termékeket római számokkal, a technológiai táblázat legyen a következő:

	I	II	III	IV
A	4	3	3	1
B	2	1	0	5
C	0	1	2	3

Ha hasonló adatoknál a termékek mindig oszlopfőn találhatók és az erőforrások mindig sorkezdők, akkor az adott termelés jellemzéséhez elegendő megadni egy számtáblázatot, egy mátrixot, tehát magát a „számtéglalapot”.

A vektor is és a mátrix is tulajdonképpen a számfogalom általánosítása, velük a számokhoz hasonlóan műveleteket lehet végezni és igen hasznos célokat érhetünk el alkalmazásukkal. A vektorokat speciális számtáblázatoknak (mátrixoknak) tekinthetjük, olyanoknak, amelyeknek egy soruk, vagy egy oszlopuk van. Így a mátrixokkal kezdünk el foglalkozni és az eredményeinket megfogalmazzuk vektorokra is. Több esetben viszont a vektorokra kimondott állításokat általánosítjuk mátrixokra.

Látni fogjuk, hogy a mátrixokkal hogyan végezhetünk műveleteket és milyen zseniális alkalmazásokhoz vezet el a mátrixalgebra, ilyen például az optimumszámítás. Nem lesz túl könnyű dolog megismerni ezt a területet, újszerű dolgokról lesz szó. Viszont a cél, optimumszámítás az élet sok területén alkalmazható és jelentős eredményekhez vezet.