MATEMATIKA A KÖZGAZDASÁGI ALAPKÉPZÉS SZÁMÁRA

SZENTELEKINÉ DR. PÁLES ILONA

ANALÍZIS PÉLDATÁR

SALDO

Budapest, 2018

Szerző:
SZENTELEKINÉ DR. PÁLES ILONA
főiskolai docens

978-963-638-542-2

Kiadja a SALDO Pénzügyi Tanácsadó és Informatikai Zrt.
Felelős kiadó: Sibinger Márta a SALDO Zrt. vezérigazgatója
A SALDO Kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó 5

	Feladat	Eredmény
1. HALMAZELÉLETI ALAPOK	7	181
1.1 Alapfogalmak, halmazműveletek és tulajdonságaik	8	181
1.2 A valós számok halmaza. A valós számok axiómái	13	182
1.3 Halmazok Descartes-féle szorzata, koordináta rendszer. Intervallum, környezet	15	183
1.4 Halmazok számossága	16	184
1.5 Vegyes feladatok	18	184
1.6 Ellenőrző kérdések és feladatok	20	185
2. VALÓS FÜGGVÉNYEK	21	186
2.1 Függvényfogalom, valós függvények. Természetes értelmezési tartomány	22	186
2.2 Függvénytranszformációk	25	186
2.3 Szakaszonként megadott függvények, függvénytulajdonságok	27	187
2.4 Műveletek függvényekkel. Összetett és inverz függvények	28	187
2.5 Vegyes feladatok	32	189
2.6 Ellenőrző kérdések és feladatok	33	189
3. SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK	35	190
3.1 A sorozat fogalma és megadási módjai	36	190
3.2 Sorozatok tulajdonságai (monotonitás, korlátosság)	37	191
3.3 Konvergens sorozatok. Műveletek konvergens sorozatokkal	42	192
3.4 Speciális divergens sorozatok	51	193
3.5 Végtelen sorok	53	193
3.6 Vegyes feladatok	55	194
3.7 Ellenőrző kérdések és feladatok	56	195
4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA	59	196
4.1 Függvények határértéke véges helyen; folytonosság	60	196
4.2 Függvények határértéke a végtelenben	71	197
4.3* Trigonometrikus függvények határértéke és folytonossága	73	198
4.4 Vegyes feladatok	76	198
4.5 Ellenőrző kérdések és feladatok	77	200

5. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA 79 200
5.1 A differenciálhányados fogalma; a deriváltfüggvény 80 200
5.2 Differenciálási szabályok. 85 201
5.3 Magasabb rendű deriváltak 89 202
5.4* Trigonometrikus függvények deriválása 90 202
5.5* Taylor-polinom, Taylor-sor 91 203
5.6 Vegyes feladatok 93 204
5.7 Ellenőrző kérdések és feladatok 94 205

6. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK VIZSGÁLATA 96 206
6.1 Monotonitás, szélsőérték 97 206
6.2 Konvex és konkáv függvények 102 208
6.3 Függvényvizsgálat 104 209
6.4 Gazdasági alkalmazások 112 225
6.5 Vegyes feladatok 119 228
6.6 Ellenőrző kérdések és feladatok 120 228

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL 123 229
7.1 Primitív függvény, határozatlan integrál 123 229
7.2 Alapintegrálok. Egyszerű integrálási módszerek. 126 229
7.3 Integrálás helyettesítéssel 133 231
7.4 Parciális integrálás 135 232
7.5* Trigonometrikus függvények határozatlan integrálja 137 232
7.6 Vegyes feladatok 137 233
7.7 Ellenőrző kérdések és feladatok 138 235

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL 141 236
8.1 Határozott integrál. Newton-Leibniz-formula 142 236
8.2 Improprius integrál 149 237
8.3 Területszámítás 153 238
8.4 Vegyes feladatok 157 239
8.5 Ellenőrző kérdések és feladatok 158 239

9. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK 160 240
9.1 Kétváltozós függvények. Szintvonalak 161 240
9.2. Parciális deriváltak 166 241
9.3 Kétváltozós függvények szélsőértéke 169 244
9.4* Feltételes szélsőérték 174 245
9.5 Vegyes feladatok 177 246
9.6 Ellenőrző kérdések és feladatok 178 247

ELŐSZÓ

A Kedves Olvasó az *Analízis tankönyvhöz* (szerkesztette: Dr. Csernyák László) készült feladatgyűjteményt tartja a kezében. A példatárban többször hivatkozom az említett tankönyvre TK. megjelöléssel.

E feladatgyűjteményt tehát elsősorban a gazdasági jellegű felsőoktatási intézményekben analízist tanulóknak ajánlom, de hasznos lehet olyan középiskolások számára is, akik emelt szintű érettségire készülnek matematikából. Törekedtem arra, hogy önálló feldolgozásra is alkalmas legyen a példatár, vagyis ne csak a nappali tagozaton, hanem pl. a távoktatás vagy levelező tagozaton matematikát hallgatók is sikerrel készüljenek fel belőle.

A feladatanyag a BGE matematika anyagából sok éves tapasztalat alapján alakult ki.

A tanulás során először az elsajátítandó anyagrész elméleti hátterével kell tisztában lenni, ehhez nyújt segítséget a már említett tankönyv. A példatár minden fejezete úgy kezdődik, hogy összefoglalja a legfontosabb *elméleti kérdéseket*; aki ezekre jól válaszol, az kezdhet hozzá a feladatanyag feldolgozásához. Igyekeztem minél több *kidolgozott példát* mutatni. Javaslom, hogy csak ezek áttanulmányozása után fogjunk hozzá a feladatok önálló megoldásához. A *-gal jelölt feladatok nem tartoznak a törzsanyaghoz, a tankönyvben is csak kiegészítő anyagként szerepelnek. A nehezebb feladatok ▲ jelet kaptak. Az egyes fejezetek végén *vegyes feladatok* találhatók. Ezek összetettebb, kevert típusú feladatok. Végül minden fejezet *ellenőrző kérdésekkel és feladatokkal* zárul.

A példatár második része tartalmazza a feladatok végeredményeit, és a vegyes feladatok esetében útmutatást ad a feladatok megoldásához.

Csaknem valamennyi feladat részletes megoldása az onlinepeldatar.hu oldalon bejelentkezést követően érhető el.

Bízom benne, hogy e példatár segíti felhasználóját a tananyag eredményes elsajátításában, és hozzájárul az analízis érdekességeinek, szépségeinek a felfedezéséhez.

Végül köszönetet mondok a BGE matematikát oktató tanárainak, legfőképpen az első kiadás lektorainak: Horváth Jenőné dr.-nak és Fejes Ferencnek, akik értékes észrevételeikkel segítették munkámat, valamint Szegedi-Ötvös Edinának, aki gondos, türelmes munkával rögzítette a szöveget.

Jó munkát kíván

a Szerző

1. HALMAZELMÉLETI ALAPOK

Az első fejezetben egyrészt *átismételjük* a középiskolában már megismert fontos fogalmakat, mint pl. a halmaz, részhalmaz, műveletek halmazok között, a valós számhalmaz felépítése stb., ezért ezekkel a témakörökkel csak néhány feladat erejéig foglalkozunk, éppen csak annyival, hogy a felhasználó feleleveníthesse, illetve ellenőrizhesse, rendelkezik-e a továbbhaladáshoz szükséges alapokkal.

Másrészt viszont sokak számára *új ismeretet* jelent pl. a Boole-algebra fogalma, a számhalmazok korlátossága, a halmazok Descartes-féle szorzata, a környezet fogalma, valamint a halmazok számossága. Így érthető, hogy ezen anyagrészekből több feladatot kínálunk.

Aszerint, hogy ki-ki milyen alapokkal rendelkezik matematikából, kb. 2-5 óra szükséges a feladatanyag feldolgozásához.

Csak akkor kezdjünk hozzá a feladatok megoldásához, ha már tudunk válaszolni az alábbi *elméleti kérdésekre.*

- Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő, illetve hogy egyik részhalmaza a másiknak?
- Definiálja a halmazműveleteket!
- Mit jelent az, hogy A és B diszjunkt (idegen) halmazok?
- Mit értünk Boole-algebra alatt?
- Sorolja fel a halmazműveletek alapazonosságait! (TK. 1.1. tétel.)
- Hogy szólnak a de Morgan-, illetve a beolvasztási azonosságok? (TK. 1.2. tétel.)
- Mit értünk racionális, illetve irracionális szám alatt?
- Mikor mondjuk, hogy egy számhalmaz alulról, illetve felülről korlátos?
- Sorolja fel a valós számok axiómáit!
- Mit értünk két vagy több halmaz Descartes-féle szorzatán?
- Mit értünk az A szám $\delta > 0$ sugarú környezetén?
- Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő számosságú (ekvivalens)?
- Mikor mondjuk, hogy egy halmaz megszámlálhatóan végtelen (számosságú)?

1.1 Alapfogalmak, halmazműveletek és tulajdonságaik

FELADATOK

1. Állapítsuk meg, hogy az A és B halmazok egyenlők-e, illetve részhalmaza-e egyik a másiknak!

a) $A = \{10,\ 20,\ 30\}$ $\quad B = \{20,\ 30,\ 10\}$

b) $A = \{\text{a},\ \text{b},\ \text{c}\}$ $\quad B = \emptyset$

c) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ $\quad B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

d) $A = \{\text{téglalapok}\}$ $\quad B = \{\text{paralelogrammák}\}$

2. Tekintsük az alábbi halmazokat!

$A = \{\, a \mid a \text{ valós szám és } |a| = 2\}$

$B = \{\, b \mid b \text{ a } b^2 - 5b + 6 = 0 \text{ egyenlet valós gyöke}\}$

$C = \{\, c \mid c \text{ prímszám és } 0 < c \le 3\}$

$D = \{\, d \mid d \text{ egész szám és } d^2 \le 10\}$

a) Adjuk meg az A, B, C és D halmazokat elemeik felsorolásával! Vannak-e köztük egyenlők?

b) Melyik melyiknek a részhalmaza, illetve valódi részhalmaza?

3. Tekintsük az alábbi halmazokat!

$A = \{\, x \mid x - 1 > 0 \text{ egyenlőtlenség valós megoldásai}\}$

$$B = \left\{\, x \;\middle|\; \frac{x+2}{x-1} > 0 \text{ egyenlőtlenség valós megoldásai} \right\}$$

$C = \{\, x \mid x^2 + x - 2 > 0 \text{ egyenlőtlenség valós megoldásai}\}$

Adjuk meg az A, B, C halmazok elemeit és döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások!

a) $A = B$ $\quad$ c) $A \subset B$

b) $B = C$ $\quad$ d) $B \subseteq C$

1. példa

Legyen A a páros, B a 3-mal osztható, C az 5-tel osztható pozitív egész számok halmaza. A H alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza.
Mit jelentenek az alábbi halmazok?

a)	$B \cup C$	c)	$\overline{A \setminus B}$
b)	$A \cap C$	d)	$\left(H \setminus \left[B \cup (\overline{A} \cap C)\right]\right) \setminus (A \cup B)$

Megoldás:

a) $B \cup C$ -be azok és csak azok a pozitív egész számok tartoznak, amelyek B és C közül legalább az egyiknek elemei, vagyis 3-mal vagy 5-tel oszthatók.

b) $A \cap C$ -be azok és csak azok a pozitív egész számok tartoznak, amelyek A-nak is és C-nek is elemei, vagyis 10 -zel oszthatók.

c) $A \setminus B$ -be azok és csak azok a pozitív egész számok tartoznak, amelyek A-beliek, de nem B-beliek, vagyis a páros, de 3-mal nem oszthatók.

$\overline{A \setminus B}$: a pozitív egész számok közül a páratlan, valamint a 3-mal osztható páros számok halmaza.

d) Először hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezést!

$$\left\{H \setminus \left[B \cup (\overline{A} \cap C)\right]\right\} \setminus (A \cup B) = \overline{B \cup (\overline{A} \cap C)} \cap \overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A} \cap C} \cap \overline{A} \cap \overline{B} =$$
$$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap (A \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \varnothing \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) =$$
$$= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

A halmaz elemei: a sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható pozitív egész számok.

Megjegyzés: A továbbiakban az $\cup$ helyett a $+$ jelet, a $\cap$ helyett a pontot (a szorzás jelét), és a $\setminus$ helyett a $-$ jelet (a kivonás jelét) használjuk.

FELADATOK

4. Legyen a H alaphalmaz a 2008. évi magyarországi adófizetők összessége. Ezen belül jelentse A a legfeljebb 8 millió Ft jövedelemmel rendelkezők halmazát, B pedig azon adófizetők halmazát, akiknek a vagyona legalább 50 millió Ft értékű.

Kik tartoznak az alábbi halmazokba?

a)	$A + B$	e)	$B - A$
b)	AB	f)	$\overline{A + B}$
c)	$\overline{A}$	g)	$\overline{AB}$
d)	$A - B$	h)	$\overline{A - B}$

5. Jelentse a H alaphalmaz egy felsőfokú tanintézmény hallgatóinak összességét a tanév kezdetén. Ezen belül legyen

A: a tanulmányi ösztöndíjas hallgatók,
B: a matematikai modellezés tárgyat felvevő hallgatók,
C: a nappali tagozatra járó hallgatók,
D: a nők halmaza.

Kik tartoznak az alábbi halmazokba?

a)	ABC	e)	$\overline{AD} + \overline{H}$
b)	$C + \overline{D}$	f)	$\left[(\overline{B}C) + \left(\overline{A}\,\overline{\overline{C}}\right)\right] D$
c)	$(AD) + B$	g)	$\left[B(D - \overline{A})\right] - (AC)$
d)	$(D - C)A$	h)	$A\ \overline{A\ \overline{B}}\ \overline{B\ \overline{D}}$

6. Írjuk fel az 5. feladatban megadott A, B, C, D halmazok és halmazműveleti jelek segítségével az alábbi halmazokat!

a) a matematikai modellezést felvevő nappali tagozatra járó nők összessége;
b) a nappali tagozatra járó hallgatók, meg a nem nappalin tanuló nők összessége;
c) a tanulmányi ösztöndíjjal nem rendelkező nappali tagozatra járó férfi hallgatók összessége;
d) a nők közül azok, akik nem vették fel a matematikai modellezést, valamint azok a nők, akik nappalira járnak.

7. Egy társaság 8 tagja tud keringőzni, 5 tagja pedig tud tangózni. Három személy közülük keringőzni is és tangózni is tud, négyen viszont a két tánc egyikét sem ismerik.
Hányan vannak a társaságban?

2. példa

Legyen A és B a H alaphalmaz két tetszőleges részhalmaza.

Igazoljuk, hogy az $\overline{A - B}$ halmaz fölírható diszjunkt halmazok összegeként az alábbi módon:

$$\overline{A - B} = \overline{A} + (AB)$$

Megoldás:

A bizonyítás két részből áll. Először azt látjuk be, hogy az egyenlőség jobb és bal oldalán álló halmazok egyenlők, majd igazoljuk, hogy $\overline{A}$ és AB diszjunkt halmazok, azaz nincs közös elemük.

I. Az azonosság igazolása történhet közvetlenül a halmazműveletek definícióinak alkalmazásával táblázatos formában (l. TK. 1.1. tétel bizonyítása):

$a \in A$	I	I	N	N	
$a \in B$	I	N	I	N	
$a \in (A-B)$		I			
$a \in \overline{A-B}$	I		I	I	bal oldal
$a \in \overline{A}$			I	I	
$a \in (AB)$	I				
$a \in [\overline{A}+(AB)]$	I		I	I	jobb oldal

1. táblázat

A táblázatból kiolvasható, hogy az egyenlőség jobb és bal oldalán álló halmazok ugyanazokból az elemekből állnak, tehát valóban egyenlők.
A bizonyítás történhet algebrai átalakításokkal, az alapazonosságok és a de Morgan-féle azonosságok felhasználásával is:
Bal oldal: $\overline{A-B} = \overline{A\overline{B}} = \overline{A}+B$
Jobb oldal: $\overline{A}+(AB) = (\overline{A}+A)(\overline{A}+B) = H(\overline{A}+B) = \overline{A}+B.$
(A jobb oldal átalakításakor először a 2. disztributivitási szabályt alkalmaztuk.)
Látható, hogy a két oldal egyenlő egymással.

II. Belátjuk, hogy $\overline{A}$ és AB közös része az üres halmaz:
$$\overline{A}(AB) = (\overline{A}A)B = \varnothing B = \varnothing.$$
(A táblázat 5. és 6. sorából is látható, hogy $\overline{A}$ és AB metszete $\varnothing$.)

FELADATOK

8. Állapítsuk meg, hogy A és B diszjunkt halmazok-e!

a) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 6\}$ $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

b) A: a BGE összes női hallgatója. B: a BGE összes férfi hallgatója.

c) $A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } |x-2| = 4 \right\}$ $B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ és } -2 < x < 6 \right\}$

d) $A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } |x-3| < 1 \right\}$ $B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } |x-4| < 1 \right\}$

e) $A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{Q} \text{ és } x^2 - (2+\pi)x + 2\pi = 0 \right\}$

$$B = \left\{ x \;\middle|\; x \in \mathbf{N} \text{ és } \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 3 = 0 \right\}$$

9. Legyen A és B két tetszőleges részhalmaza a H alaphalmaznak. Igazoljuk, hogy az A, illetve $A+B$ halmaz fölbontható diszjunkt halmazok összegére a következőképpen:

a) $A = (AB) + (A\overline{B})$

b) $A + B = A + [B - (AB)]$

10. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

a) $(A+B)(A+\overline{B}) + (\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B}) = H$

b) $\overline{(AB)+(CD)} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$

c) $A-(B-C) = (A-B)+(AC)$

d) $(A-B)+(B-A)+\overline{(A\overline{B})+(\overline{A}B)} = H$

e) $A - \{A - [B-(B-C)]\} = ABC$

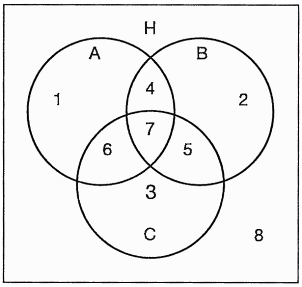
11. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő halmazalgebrai kifejezéseket!

a) $\overline{\overline{AB}+B} + (AB) + \left(A\overline{\overline{A}+B}\right)$

b) $(A+B)(B+C)$, ha $A \subset B$ és $B \subset C$

c) $\{[A-(AB)]C\} + (C-B)$

12. Írjuk fel az A, B és C halmazok, valamint halmazműveleti jelek segítségével az alábbi Venn-diagramon található (páronként diszjunkt) nyolc halmazt!



1. ábra

13. Bizonyítsuk be a halmazműveletek definícióit felhasználva (táblázat segítségével) a következő azonosságokat!

a) $(AB)C = A(BC)$ (asszociativitás)

b) $\overline{A+B+C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$ (de Morgan)

c) $\overline{ABC} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ (de Morgan)