MATEMATIKA A KÖZGAZDASÁGI ALAPKÉPZÉS SZÁMÁRA

SZENTELEKINÉ DR. PÁLES ILONA

ANALÍZIS PÉLDATÁR
részletes megoldások

SALDO

Budapest, 2018

Szerző:
SZENTELEKINÉ DR. PÁLES ILONA
főiskolai docens

978-963-638-542-2

Kiadja a SALDO Pénzügyi Tanácsadó és Informatikai Zrt.
Felelős kiadó: Sibinger Márta a SALDO Zrt. vezérigazgatója
A SALDO Kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja

TARTALOMJEGYZÉK

1. HALMAZELÉLETI ALAPOK

1.1 Alapfogalmak, halmazműveletek és tulajdonságaik

1. a) $A = B$, $A \subseteq B$, $B \subseteq A$

b) $A \neq B$, $B \subset A$

c) $A \neq B$, $A \not\subset B$, $B \not\subset A$

d) $A \neq B$, $A \subset B$

2. a) $A = \{-2\,,\,2\}$ $C = \{2\,,\,3\}$

$B = \{2\,,\,3\}$ $D = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

$B = C$

b) Mindegyik halmaz részhalmaza önmagának, továbbá

$B \subseteq C$ és $C \subseteq B$ (nem valódi részhalmazok).

$A \subset D$, $B \subset D$ és $C \subset D$ (valódi részhalmazok).

3. $A = \{\, x \mid x \text{ valós szám, } x > 1 \,\}$

$B = \{\, x \mid x \text{ valós szám, } x < -2 \text{ vagy } x > 1 \,\}$

$C = \{\, x \mid x \text{ valós szám, } x < -2 \text{ vagy } x > 1 \,\}$

a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) igaz.

4. A 2008. évi magyarországi adófizetők közül

a) a legfeljebb 8 millió Ft-os jövedelemmel rendelkezők, meg akiknek legalább 50 millió Ft értékű vagyonuk van;

b) azok a maximum 8 millió Ft-os jövedelemmel rendelkezők, akiknek a vagyona legalább 50 millió Ft értékű;

c) azok, akiknek a jövedelme 8 millió Ft-nál több;

d) azok a maximum 8 millió Ft-os jövedelműek, akik vagyonának értéke nem éri el az 50 millió Ft-ot;

e) azok a legalább 50 millió Ft értékű vagyonnal rendelkezők, akiknek a jövedelme 8 millió Ft-nál több;

f) $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$: azok, akiknek a jövedelme több mint 8 millió Ft, de a vagyonuk értéke kevesebb, mint 50 millió Ft;

g) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$: a 8 millió Ft-nál több jövedelemmel rendelkezők, meg azok, akiknek a vagyona 50 millió Ft-nál kisebb értékű;

h) $\overline{A-B} = \overline{A\,\overline{B}} = \overline{A} + B$: azok, akiknek a jövedelme 8 millió Ft-nál több, vagy akiknek a vagyona legalább 50 millió Ft értékű.

5. A felsőfokú tanintézmény hallgatói közül

a) azok a nappali tagozatra járó hallgatók, akik tanulmányi ösztöndíjasok és felvették a matematikai modellezést;

b) a nappalira járók, valamint a férfiak;

c) a tanulmányi ösztöndíjas nők, meg a matematikai modellezést fölvevő hallgatók;

d) azok a tanulmányi ösztöndíjas nők, akik nem nappalira járnak;

e) a nem tanulmányi ösztöndíjasok, valamint a férfi hallgatók;

f) azok a nappalis nők, akik nem vették föl a matematikai modellezést, vagy nem részesülnek tanulmányi ösztöndíjban;

g) $\left[B(D-\overline{A})\right]-(AC)=BDA\overline{AC}=BDA(\overline{A}+\overline{C})=$

$=(A\overline{A}BD)+(ABD\overline{C})=\varnothing+(AB\overline{C}D)=AB\overline{C}D:$

azok a tanulmányi ösztöndíjas nők, akik fölvették a matematikai modellezést, és nem a nappali tagozatra járnak;

h) $A\,\overline{A\overline{B}}\;\overline{B\overline{D}}=A(\overline{A}+B)(\overline{B}+D)=\left[(A\overline{A})+(AB)\right](\overline{B}+D)=$

$=(AB\overline{B})+(ABD)=\varnothing+(ABD)=ABD:$

a tanulmányi ösztöndíjas, matematikai modellezést fölvevő nők;

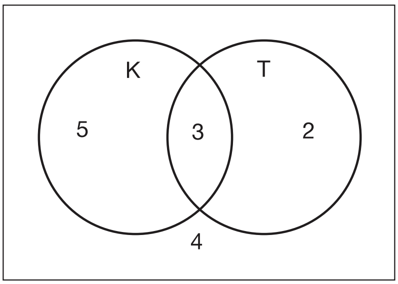
6. a) BCD

b) $C+(\overline{C}D)=(C+\overline{C})(C+D)=H(C+D)=C+D$

c) $\overline{A}C\overline{D}$

d) $D(\overline{B}+C)$

7. 14-en vannak a társaságban.



M1. ábra

8. a) nem;

b) igen;

c) $A=\{-2,6\}$, $B=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$, igen;

d) $A=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ 2<x<4\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ 3<x<5\}$, nem;

e) $A=\{2\}$, $B=\{2\}$, nem.

9. a) $(AB)+(A\overline{B}) = A(B+\overline{B}) = AH = A$ és

$(AB)(A\overline{B}) = A(B\overline{B}) = A\varnothing = \varnothing$.

b) $A+\left[B-(AB)\right] = A+(B\,\overline{AB}) = A+\left[B(\overline{A}+\overline{B})\right] =$

$= A+(\overline{A}B)+(B\overline{B}) = (A+\overline{A})(A+B)+\varnothing = H(A+B) = A+B$

$A\left[B-(AB)\right] = AB\,\overline{AB} = \varnothing.$

10. a) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B}) = (AA)+(AB)+(A\overline{B})+(B\overline{B})+$

$+(\overline{A}\,\overline{A})+(B\overline{A})+(\overline{A}\,\overline{B})+(B\overline{B}) = A+(AB)+(A\overline{B})+\varnothing+\overline{A}+(B\overline{A})+$

$+(\overline{A}\,\overline{B})+\varnothing = (A+\overline{A})+A(B+\overline{B})+\overline{A}(B+\overline{B}) = H+(AH)+\overline{A}H = H$

b) $\overline{(AB)+(CD)} = \overline{AB}\;\overline{CD} = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$

c) Bal o.: $A-(B-C) = A\overline{B\overline{C}} = A(\overline{B}+C) = (A\overline{B})+(AC)$

Jobb o.: $(A-B)+(AC) = (A\overline{B})+(AC)$

d) $(A-B)+(B-A)+\overline{(A\overline{B})+(\overline{A}B)} = (A\overline{B})+(B\overline{A})+\overline{(A\overline{B})+(\overline{A}B)} = H$,

mert $P+\overline{P} = H$, ahol $P = (A\overline{B})+(B\overline{A})$.

e) $A-\left\{A-\left[B-(B-C)\right]\right\} = A-\left\{A-\left[B-(B\overline{C})\right]\right\} =$

$= A-\left\{A-\left[B\cdot\overline{B\overline{C}}\right]\right\} = A-\left\{A-\left[B(\overline{B}+C)\right]\right\} =$

$= A-\left\{A-\left[(B\overline{B})+(BC)\right]\right\} = A-\left\{A\overline{BC}\right\} = A-\left\{A(\overline{B}+\overline{C})\right\} =$

$= A\overline{A(\overline{B}+\overline{C})} = A\left(\overline{A}+\overline{\overline{B}+\overline{C}}\right) = (A\overline{A})+(ABC) = ABC$.

11. a) $\overline{\overline{AB}+B}+(AB)+\left(A\overline{\overline{A}+B}\right) = (AB\overline{B})+(AB)+(AA\overline{B}) =$

$= \varnothing+(AB)+(A\overline{B}) = A(B+\overline{B}) = AH = A$

b) $(A+B)(B+C) = BC = B$, mert $A\subset B$ és $B\subset C$.

c) $\left\{\left[A-(AB)\right]C\right\}+(C-B) = \left\{\left[A\overline{AB}\right]C\right\}+(C\overline{B}) =$

$= \left\{\left[A(\overline{A}+\overline{B})\right]C\right\}+(C\overline{B}) = (A\overline{A}C)+(A\overline{B}C)+(C\overline{B}) = \varnothing+(C\overline{B}) = C\overline{B}$

12.

1. $A\overline{B}\,\overline{C}$	5. $BC\overline{A}$
2. $B\overline{A}\,\overline{C}$	6. $AC\overline{B}$
3. $C\overline{A}\,\overline{B}$	7. ABC
4. $AB\overline{C}$	8. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

13.

$a \in A$	I	I	I	I	N	N	N	N	
$a \in B$	I	I	N	N	I	I	N	N	
$a \in C$	I	N	I	N	I	N	I	N	
$a \in AB$	I	I							
$a \in (AB)C$	I								a) Bal o.
$a \in BC$	I				I				
$a \in A(BC)$	I								a) Jobb o.
$a \in A+B+C$	I	I	I	I	I	I	I		
$a \in \overline{A+B+C}$								I	b) Bal o.
$a \in \overline{A}$					I	I	I	I	
$a \in \overline{B}$			I	I			I	I	
$a \in \overline{C}$		I		I		I		I	
$a \in \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$								I	b) Jobb o.
$a \in \overline{ABC}$		I	I	I	I	I	I	I	c) Bal o.
$a \in \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$		I	I	I	I	I	I	I	c) Jobb o.

M1. táblázat

1.2 A valós számok halmaza. A valós számok axiómái

14. A csak alulról korlátos: $\inf A = 1 \in A$.

B korlátos: $\inf B = -1 \in B$, $\sup B = 1 \in B$.

C korlátos: $\inf C = 5 \notin C$, $\sup C = 6 \in C$.

$D = \{-1\,, 1\}$ korlátos: $\inf D = -1 \in D$, $\sup D = 1 \in D$.

$E = \{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \ldots\}$ sem alulról, sem felülről nem korlátos.

$F = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ korlátos: $\inf F = 0 \in F$, $\sup F = 3 \in F$.

$G = \{3,\ 2,\ 1,\ 0, -1,\ -2,\ \ldots\}$ csak felülről korlátos: $\sup G = 3 \in G$.

H korlátos: $\inf H = 2{,}9 \notin H$, $\sup H = 3{,}1 \notin H$.

$I = \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbf{R},\ x \le 2{,}9 \text{ vagy } x \ge 3{,}1\right\}$ sem alulról, sem felülről nem korlátos.

J korlátos, ugyanis átalakítva a kifejezést, kapjuk:

$$\frac{8^{n+1}+(-4)^n}{8^n}=8+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\begin{cases}8+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páros}\\[2ex] 8-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}$$

Ha n értéke nő, akkor $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ csökken. Így a felső határt megkapjuk, ha n helyébe 2-t, az alsó határt pedig, ha n helyébe 1-et helyettesítünk:

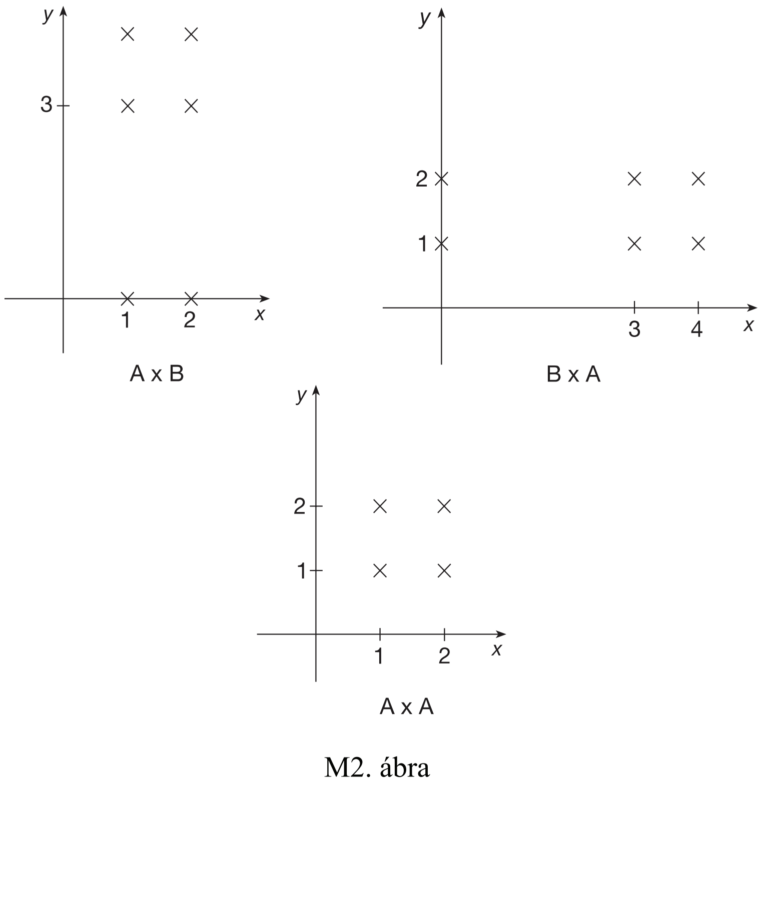
$\sup J = 8{,}25 \in J$, $\quad \inf J = 7{,}5 \in J$.

1.3 Halmazok Descartes-féle szorzata, koordináta rendszer. Intervallum, környezet

15. a) $A\times B=\{(1,0),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,0),\ (2,3),\ (2,4)\}$

$B\times A=\{(0,1),\ (0,2),\ (3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2)\}$

$A\times A=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$

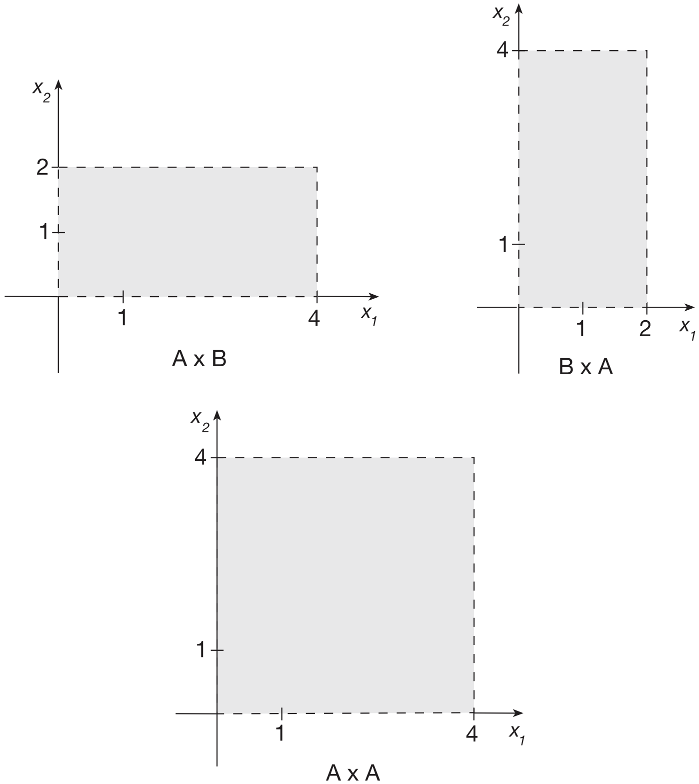


M2. ábra

b) $A \times B = \{(a\,,\ b)\ \mid 0 < a < 4,\quad 0 < b < 2,\quad a\,,b \in \mathbf{R}\}$

$B \times A = \{(b\,,\ a)\ \mid 0 < a < 4,\quad 0 < b < 2,\quad a\,,b \in \mathbf{R}\}$

$A \times A = \{(x_1\,,x_2)\ \mid 0 < x_1 < 4,\quad 0 < x_2 < 4,\quad x_1\,,\,x_2 \in \mathbf{R}\}$



M3. ábra

16. $A = \{0\,,2\}$ $\qquad B = \{1\,,4\}$ $\qquad C = \{-3,\ -6,\ -9\}$

$$A \times B \times C = \{(0,\ 1,\ -3),\ (0,\ 1,\ -6),\ (0,\ 1,\ -9),\ (0,\ 4,\ -3),\ (0,\ 4,\ -6),\ (0,\ 4,\ -9),\ (2,\ 1,\ -3),\ (2,\ 1,\ -6),\ (2,\ 1,\ -9),\ (2,\ 4,\ -3),\ (2,\ 4,\ -6),\ (2,\ 4,\ -9)\}$$

$$B \times C \times A = \{(1,\ -3,\ 0),\ (1,\ -3,\ 2),\ (1,\ -6,\ 0),\ (1,\ -6,\ 2),\ (1,\ -9,\ 0),\ (1,\ -9,\ 2),\ (4,\ -3,\ 0),\ (4,\ -3,\ 2),\ (4,\ -6,\ 0),\ (4,\ -6,\ 2),\ (4,\ -9,\ 0),\ (4,\ -9,\ 2)\}$$

$$A^3 = A \times A \times A = \{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 2),\ (0,\ 2,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2),\ (2,\ 0,\ 0),\ (2,0,\ 2),\ (2,\ 2,\ 0),\ (2,\ 2,\ 2)\}$$

17. a) Az origó középpontú, 1 illetve 2 egység sugarú körrel határolt körgyűrű, ahol a belső körív hozzátartozik a halmazhoz, a külső nem.

b) Az origó középpontú, 2 egység sugarú körlap pontjai a határoló körvonallal együtt.

c) Az origó középpontú, egység sugarú körlap negyedik síknegyedbe eső pontjai, kivéve az x tengelynek origótól különböző pontjai.

d) Az xy sík origótól különböző pontjai.

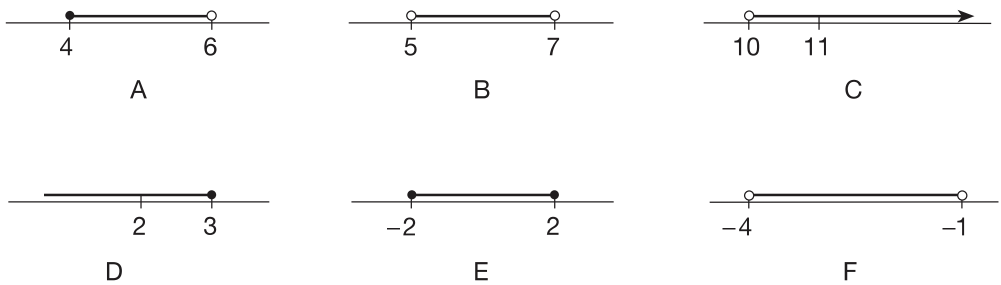
e) Az origó középpontú egység sugarú körlap pontjai (a határoló körvonallal együtt), kivéve az első síknegyednek origótól különböző pontjai.

f) Az origó középpontú 1 illetve 2 egység sugarú körrel határolt körgyűrű belső pontjai, kivéve az x tengely alatti pontok.

18. a) $A = [4, 6[$ $\qquad D =]-\infty, 3]$

$B =]5, 7[$ $\qquad E = [-2, 2]$

$C =]10, \infty[$ $\qquad F =]-4, -1[$



M4. ábra

b) $AB =]5, 6[$ $\qquad A + B = [4, 7[$ $\qquad A - B = [4, 5]$

$CD = \emptyset$ $\qquad C + D =]-\infty, 3] \cup]10, \infty[$ $\qquad C - D = C$

$EF = [-2, -1[$ $\qquad E + F =]-4, 2]$ $\qquad E - F = [-1, 2]$

19. a) $K_1(3) =]2, 4[$ $\qquad$ b) $K_{0,1}(0) =]-0{,}1,\ 0{,}1[$

c) $K_{0,001}(-1) =]-1{,}001,\ -0{,}999[$

20. $A = K_{0,01}(2)$ $\qquad C = K_1(-2)$

$B = K_{10^{-6}}(5)$ $\qquad D = K_{0,1}(1,\ 2)$

1.4 Halmazok számossága

21. Megmutatjuk, hogy a két halmaz elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Egy lehetséges megfeleltetés a következő:

$$\begin{array}{rcccccc} T = \{ & 10, & 20, & 30, & \ldots, & 10n, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbf{N}^+ = \{ & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

22. Megmutatjuk, hogy a halmaz elemei sorba rendezhetők: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$

23. Elég belátni, hogy $\mathbf{Z}$ elemeit sorba lehet rendezni: $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ \ldots$

24. A TK. 1.4. példája alapján tudjuk, hogy a $\mathbf{Q}^+$ halmaz megszámlálható, ugyanis elemeit sorba tudjuk rendezni: $1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 3,\ \frac{1}{3},\ \ldots$

Hasonlóan a $\mathbf{Q}^-$ halmaz elemei is sorba rendezhetők:

$-1,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ \ldots$

Így a $\mathbf{Q}$ halmaz elemeit is sorba rendezhetjük úgy, hogy a 0-t első helyre tesszük, és $\mathbf{Q}^+$, valamint $\mathbf{Q}^-$ elemeit „összefésüljük”:

$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,$ tehát a $\mathbf{Q}$ halmaz is megszámlálható számosságú.

25. Mivel a halmazok megszámlálható számosságúak, ezért elemeikből sorozat készíthető:

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\}$$
$$B = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\}$$

Az $A \cup B$ halmaz elemei szintén sorba rendezhetők:

$$A \cup B = \{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ \ldots\}$$

Tehát az $A \cup B$ halmaz is megszámlálható.

Megjegyzés: Ha A és B elemei között egyenlők is vannak, akkor az „összefésülésnél” a már másodszor előforduló elemet „átugorjuk”, vagyis kihagyjuk.

26. A **24**. feladat alapján tudjuk, hogy a $\mathbf{Q}$ halmaz megszámlálható számosságú, azaz elemei sorba rendezhetők:

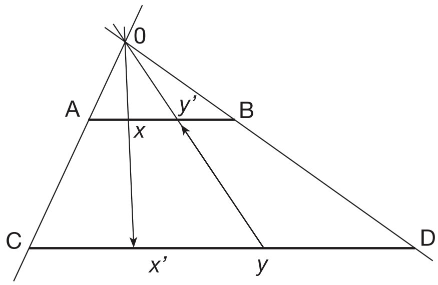
$$\mathbf{Q} = \{r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\}.$$

Így a $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ halmaz elemeit célszerű a következőképpen elrendezni:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(r_1,\ r_1) & \rightarrow & (r_1,\ r_2) & & (r_1,\ r_3) & \rightarrow & (r_1,\ r_4) & \ldots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(r_2,\ r_1) & & (r_2,\ r_2) & & (r_2,\ r_3) & & (r_2,\ r_4) & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(r_3,\ r_1) & & (r_3,\ r_2) & & (r_3,\ r_3) & & (r_3,\ r_4) & \ldots \\
& \swarrow & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

A nyilak egy lehetséges sorba állítást mutatnak.

27. A két szakasz pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető pl. az *M5. ábrán* látható módon.



M5. ábra

28. Igen; $\mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^+$ egyenlő számosságú, mivel elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít pl. az $f(x) = 2^x \quad x \in \mathbf{R}$ függvény.

1.5 Vegyes feladatok

29. $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ $\qquad C = \{x \mid x \in \mathbf{R},\quad x < -2 \text{ vagy } x > 2\}$

$B = \{-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4\}$ $\qquad D = \{x \mid x \in \mathbf{R},\quad x \geq 3\}$

a) $D \subset C$

b) A és B diszjunkt halmazok, mert $AB = \emptyset$.

c) $A + B = \{-4,\ -\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 4,\ 5,\ 10\}$

Korlátos: $\inf(A+B) = -4$, $\quad \sup(A+B) = 10$.

$A - C = \{1, 2\}$ korlátos: $\inf(A-C) = 1$, $\quad \sup(A-C) = 2$.

$C - B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\quad x < -2,\ x \neq 4 \text{ vagy } x > 2,\ x \neq 4\}$

sem alulról, sem felülről nem korlátos.

$BC = \{-4\ , 4\}$ korlátos: $\inf(BC) = -4$, $\quad \sup(BC) = 4$.

$CD = D$ csak alulról korlátos: $\inf D = 3$.

$C + D = C$ sem alulról, sem felülről nem korlátos.

30. Többféle megoldás lehetséges, például:

a) $A+B+C$

b) $A\overline{B}\,\overline{C}$

c) $(A\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}B\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}C)$

d) $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+(A\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}B\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}C)$

e) $\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

31. 1. Belátjuk, hogy páronként diszjunkt halmazok:

$$\left[A-(BC)\right](B-A)=A\overline{BC}\,B\overline{A}=(A\overline{A})\overline{BC}\,B=\varnothing$$

$$\left[A-(BC)\right]ABC=A\overline{BC}\,ABC=ABC(\overline{B}+\overline{C})=$$

$$=(AB\overline{B}C)+(ABC\overline{C})=\varnothing$$

$$\left[A-(BC)\right]\cdot\overline{A+B}=A\overline{BC}\;\overline{A}\;\overline{B}=\varnothing$$

$$(B-A)ABC=B\overline{A}ABC=\varnothing$$

$$(B-A)\overline{A+B}=B\overline{A}\;\overline{A}\;\overline{B}=\varnothing$$

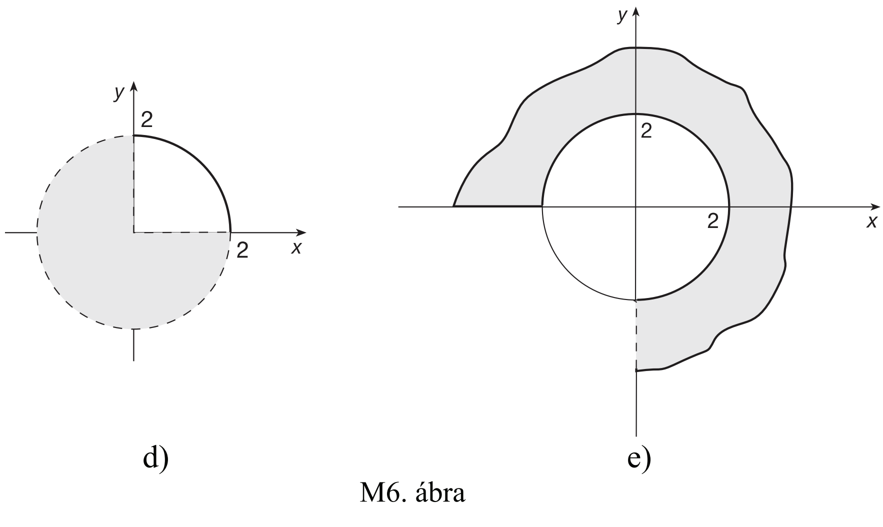
$$ABC\overline{A+B}=ABC\;\overline{A}\;\overline{B}=\varnothing$$

2. Belátjuk, hogy egyesítésük az alaphalmaz:

$$\left[A-(BC)\right]+(B-A)+(ABC)+\overline{A+B}=(A\overline{BC})+(B\overline{A})+(ABC)+$$

$$+(\overline{A}\;\overline{B})=A\left[\overline{BC}+(BC)\right]+\left[\overline{A}(B+\overline{B})\right]=(AH)+(\overline{A}H)=A+\overline{A}=H\,.$$

32. I. f) a kifejezés egyszerűbb alakra hozva: $(ABC)+(A\overline{B}\,\overline{C})$.



d) e)

M6. ábra

II. g) $B - C$ i) $\overline{A}\,\overline{C}$

h) $A\overline{B}C$ j) $(ABC) + (A\overline{B}\,\overline{C})$

33. a) $]-1\,;4[$ b) $]2\,;3[$ c) $]-1\,;2]$

34. Mivel megszámlálhatóan végtelen sok halmazt egyesítünk, ezért a halmazok sorba állíthatók: $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...;$ de maguk a halmazok is megszámlálható számosságúak, vagyis minden egyes halmaznak az elemei is sorba rendezhetők. Ezt felhasználva az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...$ halmaz elemeit a következőképpen célszerű elrendezni.

$$\begin{array}{lccccccccc}
A_1: & a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
A_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
A_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \dots \\
 & & \swarrow & & & & & & \\
A_4: & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \dots \\
 & \downarrow & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Az elemeket most már könnyen sorba állíthatjuk, pl. így (a nyilak mentén haladva):

$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{23},\ \dots$

Vegyük még figyelembe a 25. feladat utáni megjegyzést is.

1.6 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Az összeadás és a szorzás kommutatív (lásd 1.1. tétel), a kivonás azonban nem: $B - A \neq A - B$. Ez utóbbi Venn-diagramon is ellenőrizhető.

2. Nem igaz. A kétféle algebrában vannak ugyan egyforma azonosságok (pl. kommutativitás, asszociativitás, stb.), de vannak eltérőek is (pl. a Boole-algebrában igaz az $A + A = A$ azonosság, de a valós számok algebrájában nem.)

3. Nem igaz az a) b) és d) azonosság (erről Venn-diagram segítségével is meggyőződhetünk).
Igaz a c) azonosság, melyet pl. Boole-algebrai átalakítások segítségével könnyen igazolhatunk.

4. Igen.

5. a) Hamis, mert nem valós számok, hanem 12 db rendezett valós *számpár* alkotja a halmazt.

b) Hamis, mert a halmaznak nem 9, hanem 24 db eleme van. (Az elemek rendezett valós számhármasok.)

c) Igaz. Legyen pl.: $A=\{a,\ b\}$ és $B=\{c,\ d,\ e\}$.

Ekkor $A\times B=\{(a,\ c),\ (a,\ d),\ (a,\ e),\ (b,\ c),\ (b,\ d),\ (b,\ e)\}$.

$B\times A=\{(c,\ a),\ (c,\ b),\ (d,\ a),\ (d,\ b),\ (e,\ a),\ (e,\ b)\}$.

d) Hamis, mert a két halmazt nem ugyanazok az elemek alkotják (lásd c) pont megoldása). Pl.: $(a,\ c)\neq(c,\ a)$.

6. a) Nem igaz. A két halmaz ekvivalens.

b) Igaz. Mindkét halmaz megszámlálható számosságú.

c) Nem igaz; ugyanis ha az irracionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen lenne, akkor a (megszámlálhatóan végtelen) racionális számok halmazával egyesítve – a valós számok halmaza is megszámlálható számosságú lenne. A valós számok halmaza azonban nem megszámlálható (lásd 1.8. tétel).

d) Nem igaz (lásd pl.: a b) pontban szereplő $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{Q}$ halmazokat).

e) Igaz (lásd a 27. feladatot).

2. VALÓS FÜGGVÉNYEK

2.1 Függvényfogalom, valós függvények. Természetes értelmezési tartomány

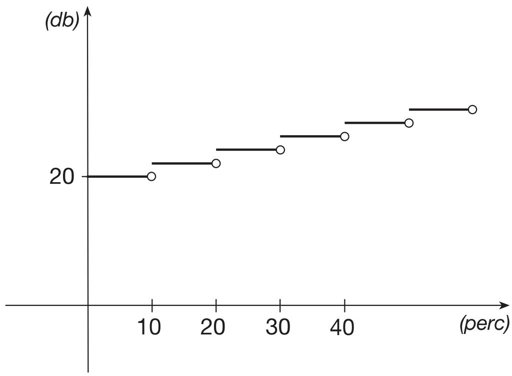
35. Függvényt határoz meg a b), d) és e) hozzárendelés, ezeknél ugyanis minden lakáshoz *pontosan egy* dolgot rendelünk. Nem függvény azonban az a) és c) hozzárendelés, mert egy-egy lakáshoz több autó, illetve több lakó is tartozhat (vagyis nem egyértelmű a megfeleltetés).
A b) nem kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mert vannak olyan lakások, amelyekhez ugyanazt a számot rendeljük (pl. két lakáshoz is 0-t rendelünk).
Az e) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mert minden lakáshoz más-más sorszám tartozik.
A d) hozzárendelés akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha nincs két olyan lakás, melyben ugyanannyian laknak.
Mindhárom függvény valós értékű, mert értékkészletük részhalmaza a valós számok halmazának. Valós-valós függvény nincs közöttük, mert mindegyik függvény értelmezési tartományát a társasház lakásai – nem pedig valós számok – alkotják.

36. a) $f(25)=1{,}2+0{,}02\cdot 25=1{,}7$, azaz egy 25 éves embernek a vér koleszterinkoncentrációja 1,7 gramm/liter.
b) Évente 0,02 grammal nő a vér koleszterinkoncentrációja literenként.

37. $f(x)=\dfrac{3}{4}x+5, \quad x>20$ (mértékegység: ezer Ft)

38. a) 0,72%
b) $f(40)\approx 854$ (millió)

39. $f(x)=20+2\left[\dfrac{x}{10}\right], \quad x\geq 0$
(M. 7. ábra)



M 7. ábra

40. a) $3x^2-7x+2\neq 0$, azaz $x\in \mathbf{R}-\left\{\dfrac{1}{3}, 2\right\}$
b) $x^4+1\neq 0$, azaz $x\in \mathbf{R}$.
c) $x^2-4\geq 0$, azaz $|x|\geq 2$.
d) $x\geq 2$ és $x\geq -2$, vagyis $x\geq 2$.

e) $x-1>0$ és $6-x>0$, vagyis $1<x<6$.

f) $-x^2+7x-6>0$, vagyis $1<x<6$.

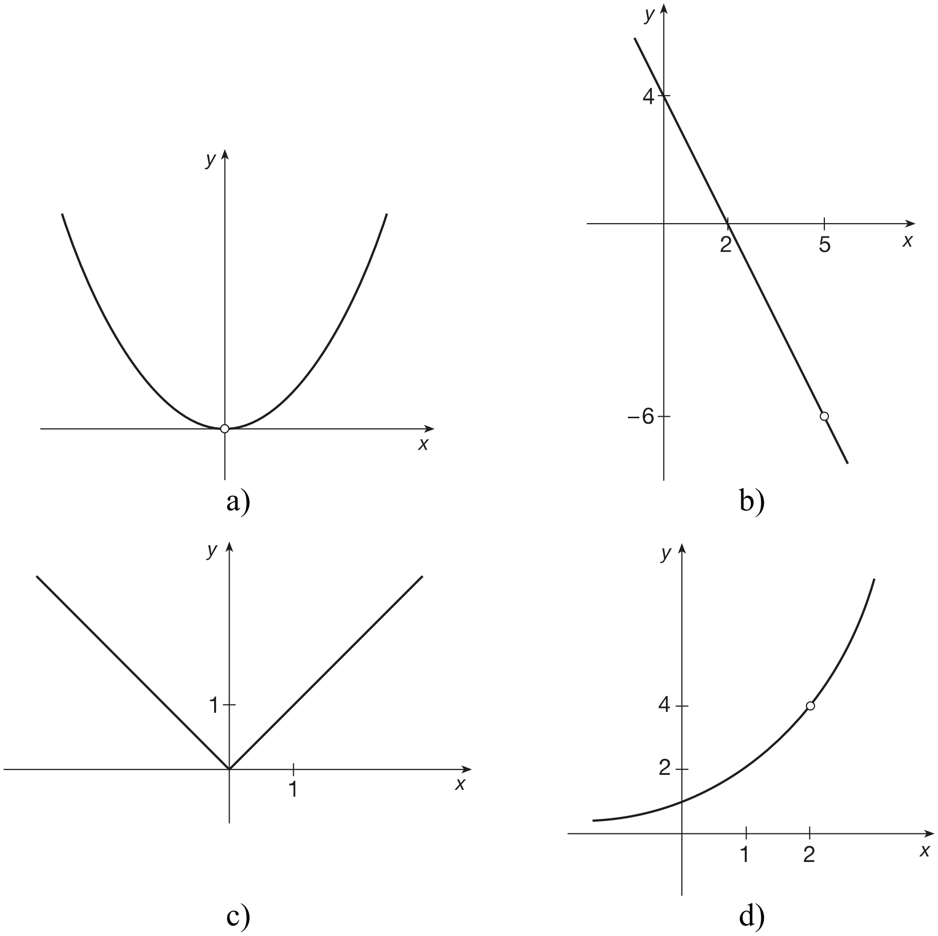
A c) és d) pontbeli függvények nem egyenlők, mert az értelmezési tartományuk nem egyezik meg. Az e) és f) pontbeli függvények sem egyenlők, mert bár az értelmezési tartományuk egyenlő, de ugyanazon x értékhez más-más függvényértéket rendelnek.

41. a) $f(x)=x^2,\ x\in \mathbf{R}-\{0\},\quad R_f=\mathbf{R}^+$.

b) $f(x)=\dfrac{-2(x-2)(x-5)}{x-5}=-2x+4,\quad x\in \mathbf{R}-\{5\},\quad R_f=\mathbf{R}-\{-6\}.$

c) $f(x)=|x|,\quad x\in \mathbf{R},\quad R_f=[0,\ \infty[.$

d) $f(x)=\dfrac{2^{2x}-4\cdot 2^x}{2^x-4}=\dfrac{2^x(2^x-4)}{2^x-4}=2^x,\quad x\in \mathbf{R}-\{2\},\quad R_f=\mathbf{R}^+-\{4\}.$



M 8. ábra

2.2 Függvénytranszformációk

42. Teljes négyzetté alakítás után a képletből leolvashatók a transzformációs lépések.

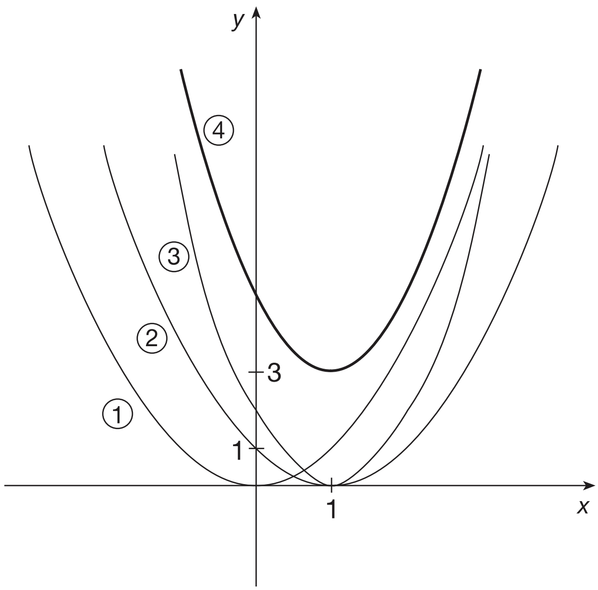
$$g(x) = x^2 + 10x + 20 = (x+5)^2 - 25 + 20 = (x+5)^2 - 5$$

$$h(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2\left[(x-1)^2 - 1\right] + 5 = 2(x-1)^2 + 3$$

$$k(x) = -x^2 - 6x + 1 = -(x^2 + 6x) + 1 = -\left[(x+3)^2 - 9\right] + 1 = -(x+3)^2 + 10$$

Pl. a h függvény esetén a transzformációs lépések (egy lehetséges sorrendje):

1. $x \mapsto x^2$ alapfüggvény ábrázolása;
2. $x \mapsto (x-1)^2$: eltolás az x tengely mentén pozitív irányban egy egységgel;
3. $x \mapsto 2(x-1)^2$: nyújtás az y tengely mentén, azaz minden pontnak az x tengelytől mért távolsága 2-szeresére változik;
4. $x \mapsto 2(x-1)^2 + 3$: eltolás az y tengely mentén 3 egységgel pozitív irányban.



M 9. ábra

43. Egy-egy lehetséges megoldást mutatunk.

a) Alakítsuk át a képletet:

$$g(x) = \frac{5-x}{x-2} = -\frac{x-5}{x-2} = -\frac{(x-2)-3}{x-2} = -1 + \frac{3}{x-2}$$

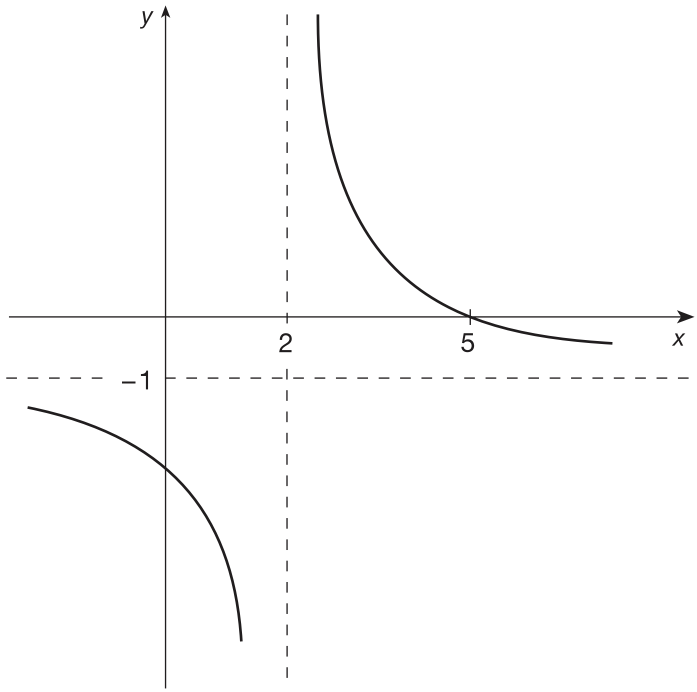
A transzformációs lépések:

1. az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ alapfüggvény ábrázolása;

2. $x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$: eltolás az x tengely mentén pozitív irányban 2 egységgel;

3. $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$: minden pontnak az x tengelytől vett távolsága 3-szorosára nő;

4. $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}-1$: eltolás az y tengely mentén egy egységgel negatív irányban.



M 10. ábra

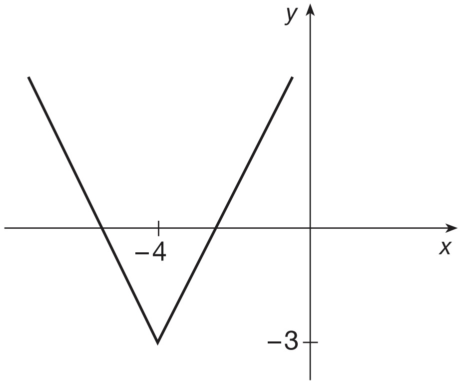
b) $g(x)=|2x+8|-3=2|x+4|-3$

1. az $f(x)=|x|$ alapfüggvény ábrázolása;

2. $x \mapsto 2|x|$: minden pontnak az x tengelytől mért távolsága 2-szeresére nő;

3. $x \mapsto 2|x+4|$: eltolás az x tengely mentén 4 egységgel negatív irányban;

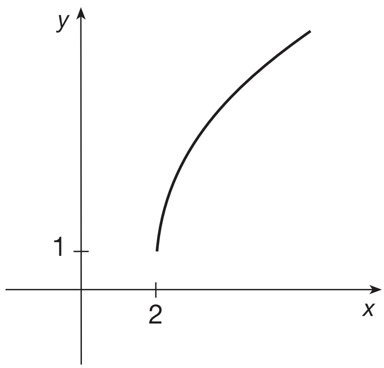
4. $x \mapsto 2|x+4|-3$: eltolás az y tengely mentén 3 egységgel negatív irányban.



M 11. ábra

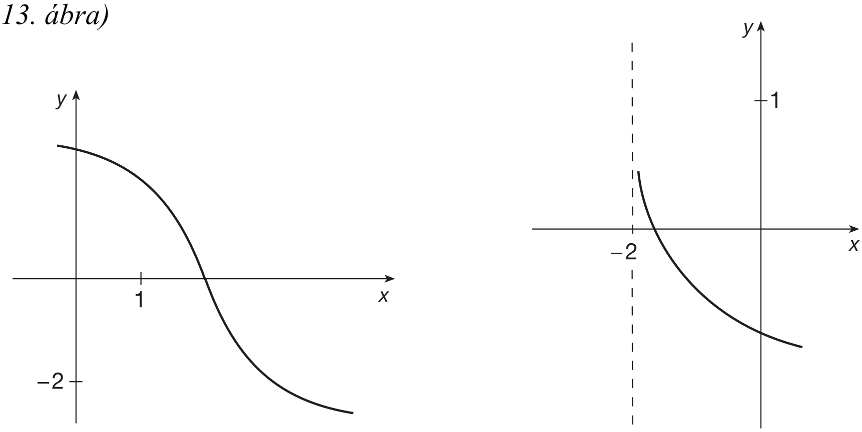
c) $g(x)=\sqrt{9x-18}+1=\sqrt{9(x-2)}+1=3\sqrt{x-2}+1$

1. az $f(x)=\sqrt{x}$ alapfüggvény ábrázolása;
2. $x \mapsto \sqrt{x-2}$: eltolás az x tengely mentén 2 egységgel pozitív irányban;
3. $x \mapsto 3\sqrt{x-2}$: minden pontnak az x tengelytől mért távolsága 3-szorosára változik;
4. $x \mapsto 3\sqrt{x-2}+1$: eltolás az y tengely mentén pozitív irányban egy egységgel.



M 12. ábra

44. *(M. 13. ábra)*



c) e)

M 13. ábra

45. a) Az $f(x)=\dfrac{1}{2x-6}$, $x\in\,]1\,;2\,]$ függvény képletéből közvetlenül (vagy grafikus vizsgálat alapján) adódik, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő;

$f(1)=-\dfrac{1}{4}$, $f(2)=-\dfrac{1}{2}$, így $R_f=\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[$.

b) Érdemes vázolni a függvény grafikonját, ahonnan adódik: $R_f=\mathbf{R}$.

c) $f(x)=3\sqrt{x^2-2x+1}=3\sqrt{(x-1)^2}=3\left|x-1\right|$, így $[0\,;6\,[$

d▲) Vegyük észre, hogy az f függvény gráfja az $x\mapsto ctgx$ függvény grafikonjának x tengely irányú zsugorításával keletkezik. E transzformáció során a periódushossz π-ről $\dfrac{1}{\pi}$-szeresére, vagyis egy egységre változik. Így: $R_f=\mathbf{R}$.

2.3 Szakaszonként megadott függvények, függvénytulajdonságok

46. a) Korlátos: $\inf f(x)=-1$, $\sup f(x)=1$.

b) $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & \text{ha} \quad x<-3\\ 5, & \text{ha} \quad -3\le x<2\\ 2x+1, & \text{ha} \quad x\ge 2\end{cases}$

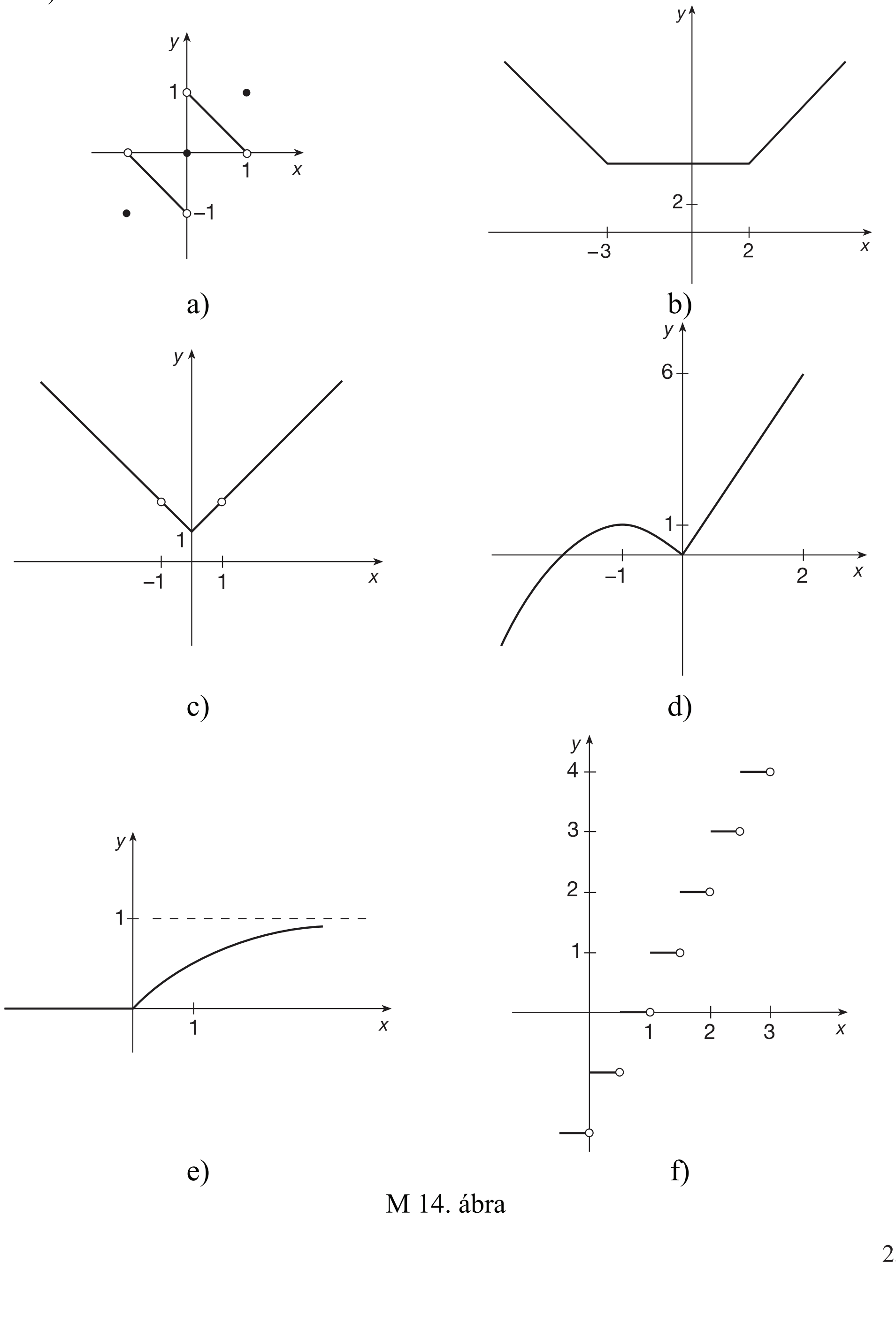
Csak alulról korlátos: $\inf f(x)=5$.

c) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{ha} \quad 0 \le x \ne 1 \\ 1-x, & \text{ha} \quad -1 \ne x < 0 \end{cases}$ Csak alulról korlátos: $\inf f(x)=1$.

d) Csak felülről korlátos: $\sup f(x)=6$.

e) Korlátos: $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=1$.

f) Nem korlátos.



M 14. ábra

47. a) Páratlan, mert $D_f = \mathbf{R}$, és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x).$$

b) Se nem páros, se nem páratlan, mert van olyan $x \in \mathbf{R}$, hogy

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) + 4 = -2x^3 + x + 4 \neq \pm f(x),$$

pl. $f(-1) = 3 \neq \pm f(1) = 5$.

c) Páros, mert $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$ és minden $x \in D_f$ esetén

$$f(-x) = \frac{1}{5(-x)^4 + 2(-x)^2} = \frac{1}{5x^4 + 2x^2} = f(x).$$

d) Páros, mert $D_f = \mathbf{R}$, és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

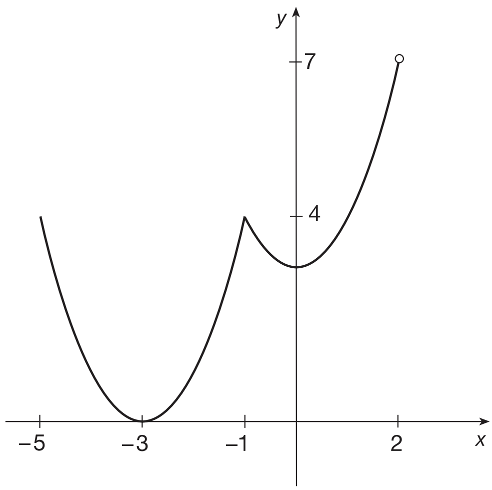
$$f(-x) = 3^{-x} + 3^x = f(x).$$

e) $D_f = \mathbf{R}_0^+$ nem szimmetrikus az origóra $\Rightarrow$ se nem páros, se nem páratlan.

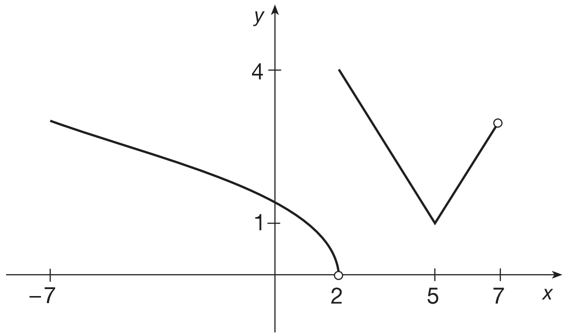
f) Páros, mert $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, és minden $x \in D_f$ esetén

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

48. *(M. 15. ábra)*



M15.a) ábra



M 15.b) ábra

a) $R_f = [0\,;7[$; nem monoton, de vannak monotonitási szakaszai: szigorúan monoton csökken a $[-5\,;-3]$ és $[-1\,;0]$ intervallumokban, valamint szigorúan monoton növekedő a $[-3\,;-1]$ és $[0\,;2[$ intervallumokban.
Korlátos: $\inf f(x) = 0$ és $\sup f(x) = 7$.
Lokális maximumhelyek: $x = -5$ és $x = -1$,
a lokális maximumértékek: $f(-5) = f(-1) = 4$.
Lokális minimumhelyek: $x = -3$ és $x = 0$,
a lokális minimumértékek: $f(-3) = 0$ és $f(0) = 3$.
Abszolút maximumhely nincs, abszolút minimumhely: $x = -3$
és az abszolút minimumérték: $f(-3) = 0$.

b) $R_f =]0\,;\,4]$; nem monoton, de vannak monotonitási szakaszai: szigorúan monoton csökkenő a $[-7\,;2[$ és $[2\,;5]$ intervallumokban, valamint szigorúan monoton növekedő az $[5\,;7[$ intervallumban.
Korlátos: $\inf f(x) = 0$ és $\sup f(x) = 4$.
Abszolút (és lokális) maximumhely: $x = 2$, értéke: $f(2) = 4$, lokális maximumhely: $x = -7$, értéke: $f(-7) = 3$, lokális minimumhely: $x = 5$, értéke: $f(5) = 1$, abszolút minimuma nincs.

2.4 Műveletek függvényekkel. Összetett és inverz függvények

49. a) $f + g:\; x \mapsto \lg(x-4) + \lg(x+4), \quad x > 4$.

b) $f + g \neq h$, mert $D_{f+g} \neq D_h$:

$D_{f+g} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x > 4\}$, $D_h = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x < -4 \vee x > 4\}$.

50. a) $f+g:\ x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x}, \quad x \in \mathbf{R}-\{0\}.$

$f \cdot g:\ x \mapsto 2, \quad x \in \mathbf{R}-\{0\}.$

$\dfrac{f}{g}:\ x \mapsto \dfrac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbf{R}-\{0\}.$

b) $(f+g)(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{5-x}, \quad x \in [3\,;\,5].$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{2x-6}\cdot\sqrt{5-x}, \quad x \in [3\,;\,5].$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{2x-6}}{\sqrt{5-x}}, \quad x \in [3\,;\,5[\,.$

c) $(f+g)(x)=\lg x^2+\lg x=2\lg x+\lg x=3\lg x, \quad x>0.$

$(f \cdot g)(x)=(\lg x^2)\lg x=2\cdot\lg^2 x, \quad x>0.$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lg x^2}{\lg x}=\dfrac{2\lg x}{\lg x}=2, \quad x \in \mathbf{R}^+-\{1\}.$

51. a) $f \circ g:\ x \mapsto \sqrt{3-x}, \quad x \le 3 \qquad g \circ f:\ x \mapsto 3-\sqrt{x}, \quad x \ge 0$

b) $f \circ g:\ x \mapsto \lg(x+3), \quad x>-3 \qquad g \circ f:\ x \mapsto 3+\lg x, \quad x>0$

c) $f \circ g:\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2-2x-24)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x<-4 \ \vee \ x>6 \\ 0, & \text{ha } x=-4 \ \vee \ x=6 \\ -1, & \text{ha } -4<x<6 \end{cases}$

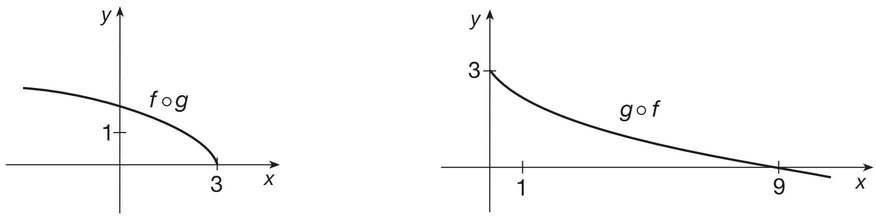
$g \circ f:\ x \mapsto \begin{cases} -21, & \text{ha } x<0 \\ -24, & \text{ha } x=0 \\ -25, & \text{ha } x>0 \end{cases}$

d) $f \circ g:\ x \mapsto \log_3(-x^2)$ nem értelmezhető egyetlen valós x-re sem, mert $-x^2 \le 0$, ha $x \in \mathbf{R}$.

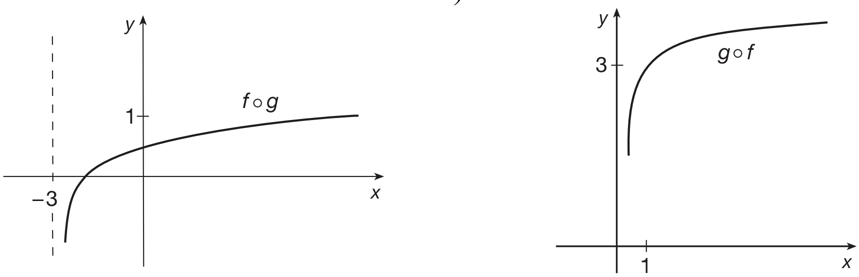
$g \circ f:\ x \mapsto -(\log_3 x)^2, \quad x>0$

e) $f \circ g:\ x \mapsto \left|\dfrac{2x+5}{x+3}\right|, \quad x \in \mathbf{R}-\{-3\}$

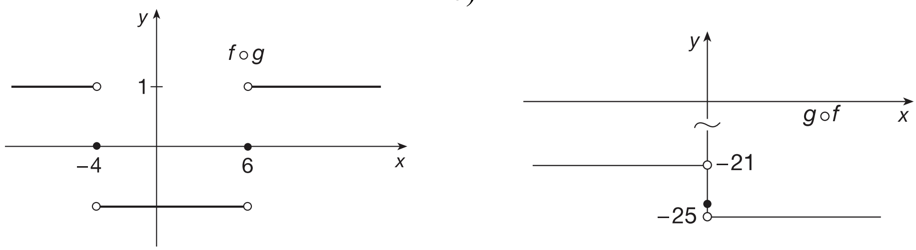
$g \circ f:\ x \mapsto \dfrac{2|x|+5}{|x|+3}=\begin{cases} \dfrac{2x+5}{x+3}=2-\dfrac{1}{x+3}, & \text{ha } x \ge 0 \\ \dfrac{-2x+5}{-x+3}=2+\dfrac{1}{x-3}, & \text{ha } x<0 \end{cases}$



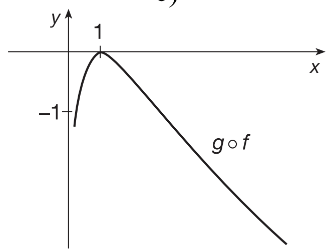
a)



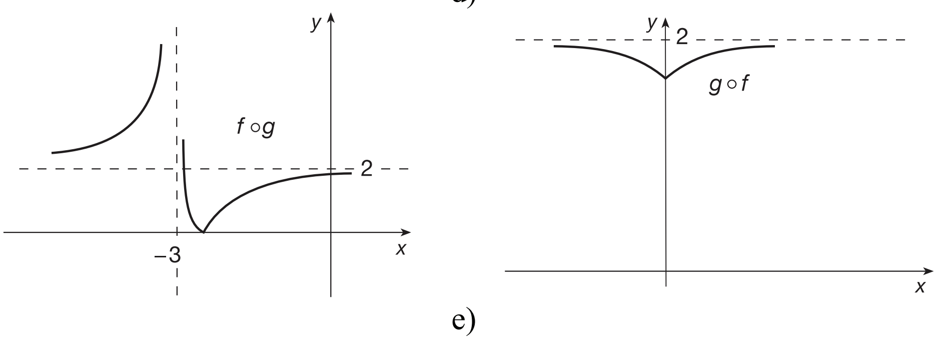
b)



c)



d)



e)

M. 16. ábra

52. a) $f\circ g:\ x\mapsto\left|-x^2+11x-28\right|,\qquad x\in\mathbf{R}$

$g\circ f:\ x\mapsto -|x|^2+11\cdot|x|-28,\qquad x\in\mathbf{R}$

$f\circ f:\ x\mapsto \big||x|\big|=|x|,\qquad x\in\mathbf{R}$

$g\circ g:\ x\mapsto -(-x^2+11x-28)^2+11(-x^2+11x-28)-28,\qquad x\in\mathbf{R}$

b) $f\circ g:\ x\mapsto \dfrac{2}{x^2}+1,\qquad x\in\mathbf{R}-\{0\}$

$g\circ f:\ x\mapsto \dfrac{1}{2x^2+1},\qquad x\in\mathbf{R}$

$f\circ f:\ x\mapsto 2(2x^2+1)^2+1,\quad x\in\mathbf{R}$

$g\circ g:\ x\mapsto x,\qquad x\in\mathbf{R}-\{0\}$

c) $f\circ g:\ x\mapsto \log_5\sqrt{x},\qquad x>0$

$g\circ f:\ x\mapsto \sqrt{\log_5 x},\qquad x\ge 1$

$f\circ f:\ x\mapsto \log_5\log_5 x,\qquad x>1$

$g\circ g:\ x\mapsto \sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x},\qquad x\ge 0$

d) $$f\circ g:\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{2^x+2}, & \text{ha } x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{ha } x=0\\[2mm] \dfrac{1}{x^2+2}, & \text{ha } x>0\end{cases}$$

$$g\circ f:\ x\mapsto\begin{cases}2^{\frac{1}{x+2}}, & \text{ha } x<-2\\[2mm] \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2, & \text{ha } x>-2\end{cases}$$

$$f\circ f:\ x\mapsto \frac{1}{\dfrac{1}{x+2}+2},\qquad \text{ha}\quad x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{5}{2}\,;\,-2\right\}$$

$$g\circ g:\ x\mapsto\begin{cases}(2^x)^2=2^{2x}, & \text{ha } x<0\\ 0, & \text{ha } x=0\\ (x^2)^2=x^4, & \text{ha } x>0\end{cases}$$

53. Vezessük be a következő jelölést: $h=f\circ g$. Ekkor

a) $f(x)=8^x,\quad x\in\mathbf{R}\qquad\qquad g(x)=5x+4,\quad x\in\mathbf{R}$.

b) $f(x)=\sqrt{x}, \quad x \ge 0 \qquad g(x)=\dfrac{x}{x-2}, \quad x<0 \ \vee \ x>2$.

c) $f(x)=x^5, \quad x \in \mathbf{R} \qquad g(x)=3x^2-2, \quad x \in \mathbf{R}$.

d) $f(x)=x^2, \quad x \in \mathbf{R} \qquad g(x)=\lg x, \quad x>0$.

e) $f(x)=\lg x, \quad x>0 \qquad g(x)=x^2, \quad x \in \mathbf{R}-\{0\}$.

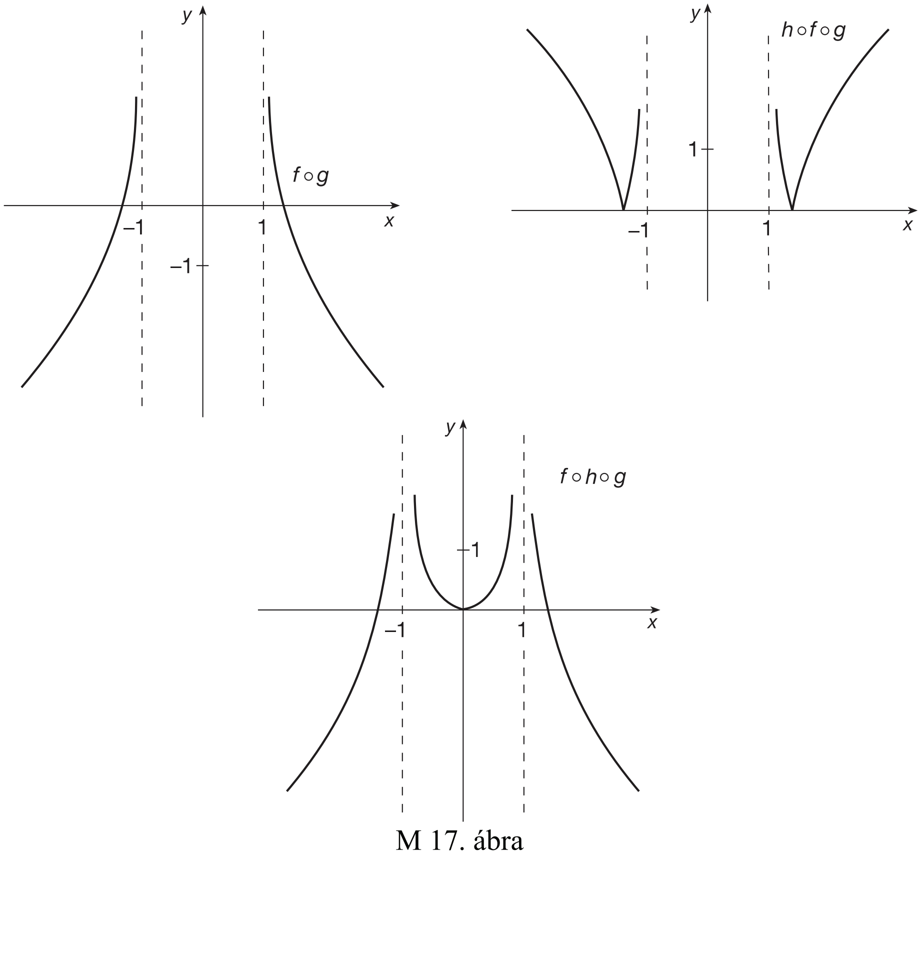
Vezessük be a következő jelölést: $h=f \circ g \circ k$. Ekkor

f) $f(x)=\sqrt{x}, \ x \ge 0 \qquad g(x)=\log_3 x, \ x>0 \qquad k(x)=7x+3, \ x>-\dfrac{3}{7}$.

54. $f \circ g:\ x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1), \quad x<-1 \ \vee \ x>1$.

$h \circ f \circ g:\ x \mapsto \left|\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)\right|, \quad x<-1 \ \vee \ x>1$.

$f \circ h \circ g:\ x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}\left|x^2-1\right|, \quad x \in \mathbf{R}-\{-1\,;1\}$.



M 17. ábra

55. Csak a b), d) és h) függvényeknek nincs inverzük. Ezeknél a függvényeknél ugyanis ugyanazt a függvényértéket több helyen is fölveszi a függvény. Pl. az $f(x)=\cos x$ függvény az $x=2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeken – vagyis végtelen sokszor – fölveszi az 1 értéket.

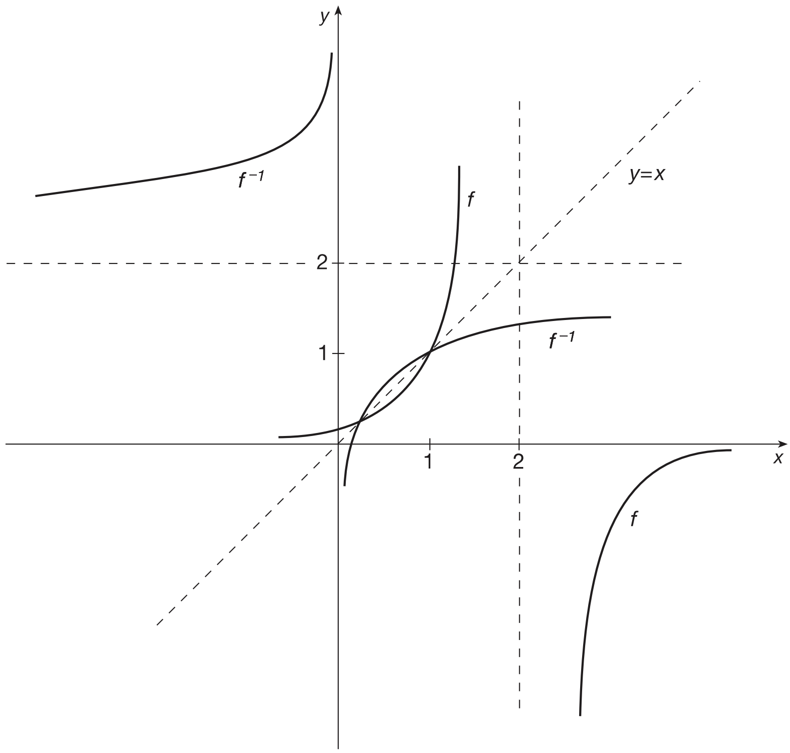
a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{3}+2, \quad x\in[0\,;6]$

c) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=f(x), \quad x\in \mathbf{R}-\{-1\}$

e) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}, \quad x\in[1\,;\infty[$

f) $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[0\,;1]$

g) $f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+2, \quad x\in \mathbf{R}-\{0\}$



g)

M 18. ábra

56. Belátható, hogy mindegyik függvény *szigorúan* monoton, ezért létezik az inverzük.

a) $f^{-1}(x)=\log_3 x-2, \qquad x>0$

b) $f^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\frac{1}{2}, \quad x\in \mathbf{R}$

c) $f^{-1}:\ x=\frac{2^{y}-2^{-y}}{2}, \quad 2x=2^{y}-2^{-y}, \quad 2^{2y}-2x\cdot 2^{y}-1=0$

$2^{y}_{1,2}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^{2}+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^{2}+1}; \quad 2^{y}>0 \ \Rightarrow\ 2^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1}$

$y=\log_2\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right), \quad x\in\mathbf{R}$

d) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & \text{ha } x<1\\ x-1, & \text{ha } x\geq 1\end{cases}$

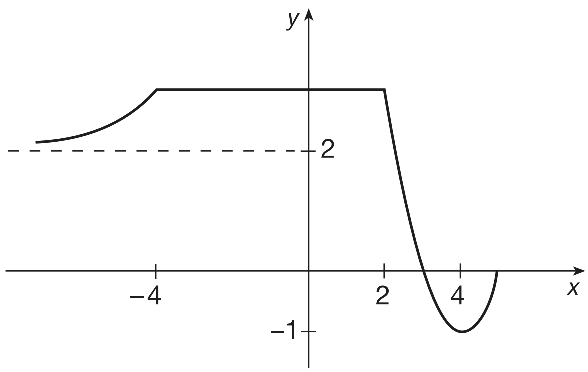
2.5 Vegyes feladatok

57. a) $f(100)=5{,}8+0{,}002\cdot 100=6$ (t/ha)

Tehát 100 kg műtrágya felhasználásához 6000 kg termésátlag tartozik hektáronként.

b) Ha 1 kg-mal növeljük hektáronként a műtrágya mennyiségét, akkor 0,002 tonnával, azaz 2 kg-mal nő a termésátlag.

58.



M 19. ábra

$R_f=[-1\,;3]$; nem monoton, de vannak monotonitási szakaszai: szigorúan monoton csökken a $[2\,;4]$ intervallumban, és szigorúan monoton növekedő a $]-\infty\,;-4[$, $[4\,;5]$ intervallumokban, valamint állandó a $[-4\,;2]$ intervallumban.

Korlátos, $\inf f(x)=-1$ és $\sup f(x)=3$.

Abszolút (és lokális) maximumhelyek: $-4 \le x \le 2$, a maximumérték: 3.
Abszolút (és lokális) minimumhely: $x = 4$, a minimumérték: -1.
Lokális maximumhely: $x = 5$, a maximumérték: $f(5) = 0$.

59. Az f függvény szigorúan monoton növekedő, a g függvény (képe hiperbola) szintén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ezért mindkét függvénynek létezik inverze:

$$f^{-1}(x) = 3^x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad R_{f^{-1}} = \mathrm{R}^+$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{9}}, \quad x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{9} \right\}, \quad R_{g^{-1}} = \mathbf{R} - \{0\}$$

$$h = f \circ g: \; x \mapsto \log_3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{9} \right), \quad D_h = \left]0\,;\,9\right[$$

h *szigorúan* monoton csökkenő függvény $\Rightarrow$ létezik inverze:

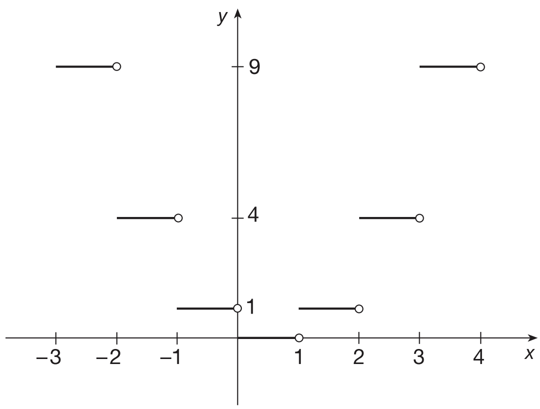
$$h^{-1}: \; x = \log_3\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{9} \right), \qquad 3^x = \frac{1}{y} - \frac{1}{9}, \qquad y = \frac{1}{3^x + \frac{1}{9}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{így:}$$

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{3^x + \frac{1}{9}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad R_{h^{-1}} = \left]0\,;\,9\right[.$$

60. $f \circ g: \; x \mapsto [x]^2, \quad x \in \mathbf{R}$.

Sem nem páros, sem nem páratlan; $R_{f \circ g} = \left\{ n^2 \mid n \in \mathbf{N} \right\}$.

Nem létezik inverze, lásd az *M 20. ábrát.*



M 20. ábra

2.6 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Nem lehet, mert egy x értékhez két y érték is tartozhat. Pl. ha $x = 0$, akkor $y = \pm 1$. (Grafikonon: van olyan függőleges egyenes, amelynek nem egy, hanem két metszéspontja van a körrel.)

2.
a) A g függvény grafikonját az f függvény grafikonjának az y^+ tengely mentén 2 egységgel történő eltolásával kapjuk.
b) a h függvény grafikonját az f függvény grafikonjának az x^- tengely mentén 2 egységgel történő eltolásával kapjuk.
c) a k függvény grafikonját az f függvény grafikonjának az y tengely mentén történő nyújtásával kapjuk: minden pont az x tengelytől mért távolságát 2-szeresére változtatja.
d) az e függvény grafikonját az f függvény grafikonjának az x tengely mentén történő zsugorításával kapjuk: minden pont az y tengelytől való távolságát felére csökkenti.

3.
a) Nem igaz; gondoljunk arra, hogy egy függvénynek több lokális maximuma is lehet.
b) Igaz.
c) Nem igaz; gondoljunk az alulról nem korlátos függvényekre.
d) Nem igaz; legyen pl. $f(x) = -x$ és $g(x) = x^3$.
Mindkét függvény monoton,de sem az összegük, sem a szorzatuk nem monoton.
e) Igaz; ugyanis ha f és g páros függvény; azaz $f(-x) = f(x)$ és $g(-x) = g(x)$ az origóra szimmetrikus értelmezési tartományon, akkor
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \quad \text{és}$$
$$(fg)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (fg)(x),$$
ahol $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ és $D_{fg} = D_f \cap D_g$.
f) Csak az összegre igaz az állítás. Két páratlan függvény szorzata ugyanis páros. (Az igazolás az e) pont mintájára elvégezhető.)

4. Nem létezik, hiszen a páros függvények nem kölcsönösen egyértelmű leképezések. (Grafikonon: van olyan vízszintes egyenes, amely nem egy, hanem több pontban metszi a függvény grafikonját.)

5. Van. Ilyen pl. az $f(x) = \sin x$ függvény.

6. Az f és f^{-1} függvények grafikonjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve.

7. Mivel $D_{f^{-1}} = R_f$ és $R_{f^{-1}} = D_f$, ezért ábrázolva az f függvényt, leolvasható, hogy a B válasz a helyes.

8. Az $f \circ g$ függvény esetében f a külső és g a belső függvény, ezért a C válasz a helyes. (Az értelmezési tartomány a $6x - 2x^2 > 0$ feltételből adódik.)

9. Pl.: $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Nincs olyan valós szám, amelyre az

$f \circ g :\ x \mapsto \sqrt{-\dfrac{1}{x^2}}$ függvény értelmezhető lenne, ugyanis

$-\dfrac{1}{x^2} < 0$ minden $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ esetén.

3. SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK

3.1 A sorozat fogalma és megadási módjai

61. a) $0,\ \frac{3}{4},\ \frac{8}{9},\ \frac{15}{16},\ \frac{24}{25},\ \ldots$

b) $-\frac{1}{2},\ \frac{4}{5},\ -1,\ \frac{8}{7},\ -\frac{5}{4},\ \ldots$

c) $2,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ \ldots$

d) $1,\ \frac{1}{4},\ 27,\ \frac{1}{16},\ 125,\ \ldots$

e) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \ldots$

f) $10,\ -10,\ 0,\ -5,\ -\frac{5}{2},\ \ldots$

g) $3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ \ldots$

62. a) Számtani sorozat; $a_n = 1 + (n-1)5 = 5n - 4$
vagy rekurzív módon: $a_1 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + 5, \quad n \geq 2$.

b) $a_n = 3 + \frac{1}{n}$

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) $a_n = \begin{cases} 2n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

e) $a_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{10^i}$ vagy: $a_1 = 3{,}3$
és $a_n = a_{n-1} + \frac{3}{10^n}, \quad n \geq 2$

f) $a_n = \left[\frac{n}{2} + 1\right]$

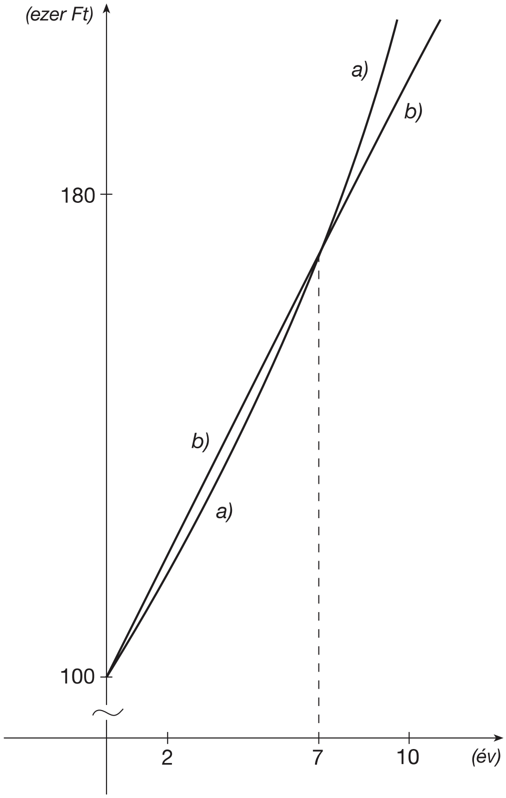
63. Az első év végén: $a_1 = 100\,000 + 100\,000 \cdot 0{,}08 = 100\,000(1+0{,}08) =$
$= 100\,000 \cdot 1{,}08$.

A 2. év végén: $a_2 = 100\,000 \cdot 1{,}08 + 100\,000 \cdot 1{,}08 \cdot 0{,}08 =$
$= 100\,000 \cdot 1{,}08(1+0{,}08) = 100\,000 \cdot 1{,}08^2$.

Az n-edik év végén: $a_n = 100\,000 \cdot 1{,}08^n$ mértani sorozat, $q = 1{,}08$.

64. a) $f(n) = 100 \cdot 1{,}08^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$, mértani sorozat, $q = 1{,}08$.

b) $f(n) = 100 + 10 \cdot n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$, számtani sorozat, $d = 10$.

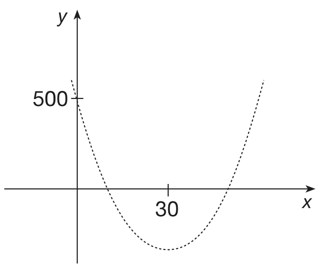


M 21. ábra

Az *M21. ábra* mutatja, hogy rövid távon a b) (lineáris) függvény szerint, hosszabb távon (7 év eltelte után) az a) (exponenciális) függvény szerint lesz magasabb a bér.

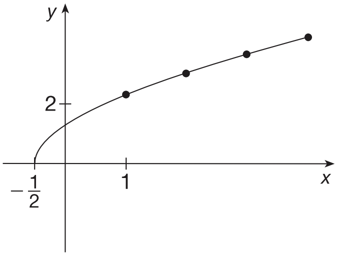
3.2 Sorozatok tulajdonságai (monotonitás, korlátosság)

65. a) Nem monoton.



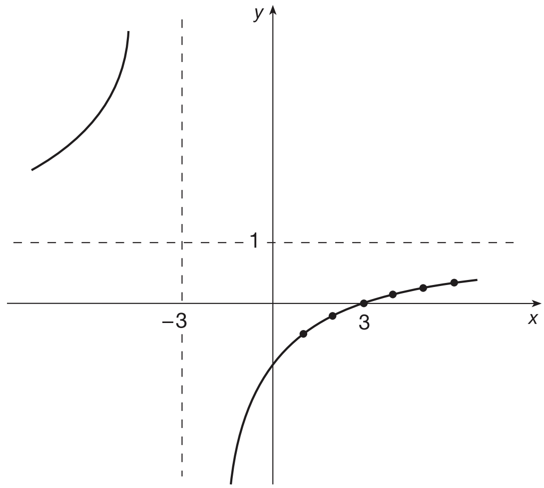
M 22. ábra

b) Szigorúan monoton növekedő.



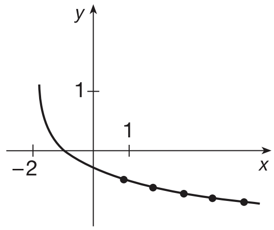
M 23. ábra

c) $a_n = \dfrac{(n-3)(n+7)}{(n+3)(n+7)} = \dfrac{n-3}{n+3}$, szigorúan monoton növekedő.



M 24. ábra

d) Szigorúan monoton csökkenő.



M 25. ábra

66. a) $a_n = 8 + \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ szigorúan monoton csökkenő.

b) $(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \dots)$, nem monoton.

c) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{7}{(5n+3)(5n-2)}>0$ minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén $\Rightarrow$ (a_n) szigorúan monoton növekedő.

d) (a_n) előjelváltó $\Rightarrow$ nem monoton.

e) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2n+2}{n^2+2n+4}-\dfrac{2n}{3+n^2}=\dfrac{-2n^2-2n+6}{(n^2+2n+4)(3+n^2)}\begin{cases}>0, \text{ ha } n=1\\ <0, \text{ ha } n\geq 2\end{cases}$

(a_n) nem monoton, illetve $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{4}{7};\ \dfrac{1}{2};\ ...\right)$ valóban nem monoton.

f) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{2(n+1)}}{3^{n+1}+4}\cdot\dfrac{3^n+4}{3^{2n}}=\dfrac{9\cdot 3^n+36}{3\cdot 3^n+4}>1$ minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén $\Rightarrow$ (a_n) szigorúan monoton növekedő.

g) $a_n=\left(-\dfrac{5}{9}\right)^n+18$, nem monoton, mert a páros indexű tagok 18-nál nagyobbak, a páratlan indexűek pedig 18-nál kisebbek.

h) $(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \ldots)$ (a_n) monoton növekedő.

67. a) Korlátos: $\inf a_n=0$ és $\sup a_n=1$.

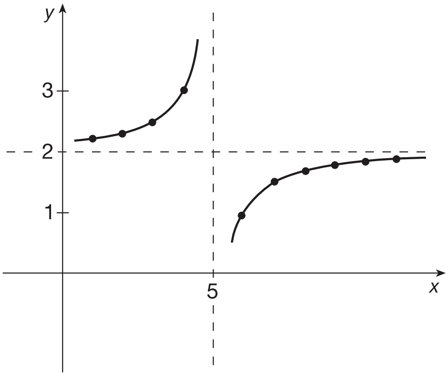
b) $a_n=\begin{cases}7+\left(\dfrac{1}{7}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páros (csökkenő)}\\ 7-\left(\dfrac{1}{7}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan (növekvő)}\end{cases}$

Korlátos: $\inf a_n=a_1=6\dfrac{6}{7}$ és $\sup a_n=a_2=7\dfrac{1}{49}$.

c) $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n+1}, & \text{ha } n \text{ páros (csökkenő)}\\ -\dfrac{1}{2n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan (növekvő)}\end{cases}$

Korlátos: $\inf a_n=a_1=-\dfrac{1}{3}$ és $\sup a_n=a_2=\dfrac{1}{5}$.

d) $a_n=2-\dfrac{1}{n-5}$ $n\in\mathbf{N}^+-\{5\}$. Ha elkészítjük az (a_n) sorozat grafikonját, akkor látható, hogy $\inf a_n=a_6=1$ és $\sup a_n=a_4=3$, tehát a sorozat korlátos. (*M26. ábra)*



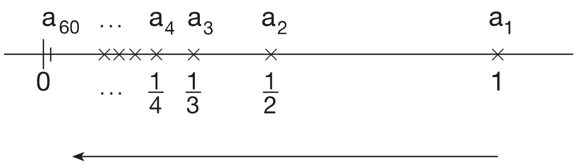
M 26. ábra

e) $a_n = -(n-10)^2 + 2$, nem korlátos, csak felülről: $\sup a_n = 2$.

f) $a_n = \log_2 8^n = \log_2 2^{3n} = 3n$, nem korlátos, csak alulról:
$\inf a_n = a_1 = 3$.

3.3 Konvergens sorozatok. Műveletek konvergens sorozatokkal

68. a) *Állítás:* $\lim \frac{1}{n} = 0$.



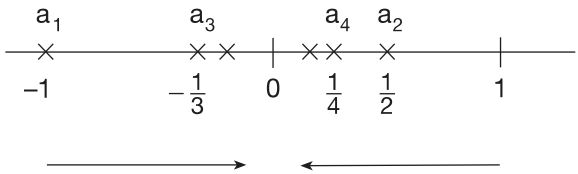
M 27. ábra

Bizonyítás: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Belátjuk, hogy létezik n_0 küszöbszám, amelynél nagyobb sorszámú tagjai a sorozatnak már mind beleesnek a határértéknek az ε sugarú környezetébe, azaz ezekre a tagokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$ Ezt megoldva kapjuk: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tehát létezik küszöbszám:

ha $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow n_0 = 1$, ha $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

b) *Állítás*: $\lim a_n = 0$



M 28. ábra

Bizonyítás: $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám.

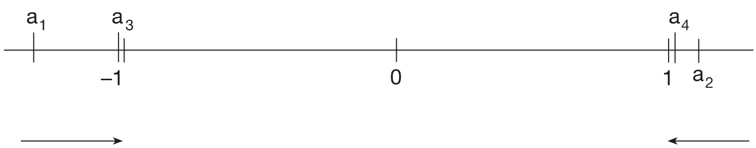
$\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tehát létezik küszöbszám: ha

$\varepsilon \geq 1 \Rightarrow n_0 = 1$, ha $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \quad n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

c) $$a_n = (-1)^n \cdot \frac{3^n + 1}{3^n} = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A 3/c. példa megoldása alapján ez a sorozat divergens.

$\lim\limits_{n \text{ páros}} a_n = 1 \neq \lim\limits_{n \text{ páratlan}} a_n = -1$



M 29. ábra

69. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám.

a) $\left|\frac{2}{n^5} - 0\right| = \frac{2}{n^5} < \varepsilon, \quad n^5 > \frac{2}{\varepsilon}, \quad n > \sqrt[5]{\frac{2}{\varepsilon}}$, azaz $n_0 = \left[\sqrt[5]{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$, ha

$0 < \varepsilon < 2$, vagy $n_0 = 1$, ha $\varepsilon \geq 2$.

b) $\left|\frac{3}{10^n} - 0\right| = \frac{3}{10^n} < \varepsilon, \quad 10^n > \frac{3}{\varepsilon}, \quad n > \lg\frac{3}{\varepsilon}$,

azaz $n_0 = \left[\lg\frac{3}{\varepsilon}\right]$, ha $0 < \varepsilon < \frac{3}{10}$, vagy $n_0 = 1$, ha $\varepsilon \geq \frac{3}{10}$.

c) $\left|\dfrac{2n}{3-4n}+\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{3}{2(3-4n)}\right| = \dfrac{3}{8n-6} < \varepsilon$, $n > \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{\varepsilon}+6\right)$,

$n_0 = \max\left\{\left[\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{\varepsilon}+6\right)\right],\ 1\right\}$.

d) $\left|\dfrac{5n^2+2}{n^2-3}-5\right| = \dfrac{17}{n^2-3} < \varepsilon$, ha $n > 1$, $n^2 > \dfrac{17}{\varepsilon}+3$, $n_0 = \left[\sqrt{\dfrac{17}{\varepsilon}+3}\right]$.

70. a) $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{100} = \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ldots\ \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1^{100} = 1$, mert $\lim\dfrac{1}{n} = 0$.

b) $\lim\dfrac{1+2n\boxed{-4}n^3}{\boxed{8}n^3-3n^2-2} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$ (A számláló azonos fokú a nevezővel).

c) $\lim\dfrac{2n^3(3n^4+n^2+1)}{(n^6+3)(n+2n^2)} = \lim\dfrac{6n^7+\ldots}{2n^8+\ldots} = 0$ (A nevező magasabb fokú, mint a számláló.)

d) A nevezőt a számtani sorozat összeg-képlete alapján átírva kapjuk:

$$\lim\frac{3n^2+1}{2+4+6+\ldots+2n} = \lim\frac{3n^2+1}{\frac{n}{2}(2+2n)} = \lim\frac{3n^2+1}{n+n^2} = 3.$$

e) $\lim\dfrac{2-\sqrt{\dfrac{3}{n^4}+1}}{\dfrac{3}{n}+2} = \dfrac{2-1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$

f) Egyszerűsítsünk $\sqrt[5]{n^8}$ -nal: $\lim\dfrac{\sqrt[5]{1+\dfrac{2}{n^5}+\dfrac{1}{n^8}}}{\dfrac{3}{\sqrt[5]{n^3}}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{n^6}+\dfrac{1}{n^5}+3}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$

g) $\lim\left[6^2-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right] = 36-0 = 36$

h) $a_n = 3+(-1)^n = \begin{cases} 4, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases} \Rightarrow$ divergens

i) $\lim \dfrac{6\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+1-\frac{2}{5^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+25}=\dfrac{0+1-0}{0-25}=-\dfrac{1}{25}$

j) Írjuk szorzat alakba a kifejezést:

$$\lim\left[\left(-\frac{1}{6}\right)^n\cos(2n+1)\right]=0,$$

mert $\lim\left(-\frac{1}{6}\right)^n=0$ ($\lim q^n=0$, ha $|q|<1$) és a $(\cos(2n+1))$ sorozat korlátos, így alkalmazhatjuk a TK. 3.6. tételt.

71. a) $\lim\left(1+\dfrac{-7}{n}\right)^n=e^{-7}$

b) $\lim\left(\dfrac{5n+3}{5n-1}\right)^{2n}\cdot\lim\left(\dfrac{5n+3}{5n-1}\right)^{-3}=\lim\left[\dfrac{\left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{5}}{n}\right)^n}\right]^2\cdot 1=\left(\dfrac{e^{\frac{3}{5}}}{e^{-\frac{1}{5}}}\right)^2=e^{\frac{8}{5}}$

c) $\lim\left(\dfrac{1-\frac{2}{4n^2}}{1+\frac{3}{4n^2}}\right)^{n^2}=\lim\dfrac{\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n^2}\right)^{n^2}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{4}}}=e^{-\frac{5}{4}}$

d) $\lim\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=\lim\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{-1}\cdot e=1$

e) $\lim\left[\dfrac{2n\left(1-\frac{5}{2n}\right)}{4n\left(1+\frac{1}{4n}\right)}\right]^n\cdot\lim\left(\dfrac{2n-5}{4n+1}\right)^{-5}=$

$$=\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{-\frac{5}{2}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^n}\right]\cdot\lim\frac{1}{\left(\frac{2n-5}{4n+1}\right)^5}=0\cdot\frac{e^{-\frac{5}{2}}}{e^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=0$$

f) $$a_n=\left[\frac{7n\left(1+\frac{3}{7n}\right)}{-7n\left(1-\frac{2}{7n}\right)}\right]^n=(-1)^n\frac{\left(1+\frac{\frac{3}{7}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{2}{7}}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\ \text{páros}}a_n=e^{\frac{5}{7}}\neq\lim_{n\ \text{páratlan}}a_n=-e^{\frac{5}{7}}\Rightarrow(a_n)\ \text{divergens.}$$

g) $$\lim_{n\,\text{páros}}\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right)^{n+100}=\lim\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right)^n\cdot\lim\left(\frac{4n+3}{4n-1}\right)^{100}=$$

$$=\lim\frac{\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{4}}{n}\right)^n}\cdot 1=\frac{e^{\frac{3}{4}}}{e^{-\frac{1}{4}}}=e;\qquad \lim_{n\,\text{páratlan}}\left(\frac{2+3n}{3n+1}\right)^{3n}=\lim\left[\frac{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n}\right]^3=$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}}\right)^3=\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3=e$$

Mivel a két részsorozat határértéke megegyezik, ezért az (a_n) sorozat konvergens és $\lim a_n=e$.

h▲) $$\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)=(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots)$$

$$\lim\left(\frac{3-2n}{1-2n}\right)^n = \lim\left(\frac{1-\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{-\frac{3}{2}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{n}\right)^n} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e^{-1}$$

Ezért $\lim a_n = \begin{cases} e^{-1}, & \text{ha } n = 4k+1,\ k \in \mathbf{N} \\ 0, & \text{ha } n = 2k,\ \quad k \in \mathbf{N}^+ \\ -e^{-1}, & \text{ha } n = 4k+3,\ k \in \mathbf{N} \end{cases}$

Mivel a részsorozatok határértékei különböznek egymástól, ezért az (a_n) sorozat divergens.

72. a) $\lim\left(\frac{1}{n}-4\right) = -4$.

$\left|\frac{1}{n}-4+4\right| < \frac{1}{999}$, $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{999}$, $\quad n > 999$, tehát az 1000. tagtól kezdve esnek a sorozat tagjai a -4-nek az ε sugarú környezetébe.

b) $\lim a_n = 0$; a 11. tagtól.

c) $\lim a_n = 4$; már az első tagtól.

d) $\lim a_n = 6$; a 448. tagtól.

e) $\lim a_n = \frac{1}{5}$; a 7. tagtól.

f▲) $\lim a_n = \frac{1}{3}$; $\quad \left|\frac{n^2+(-1)^n\cdot 5}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{15\cdot(-1)^n-1}{9n^2+3}\right| < \frac{1}{100}$

Ha n páros: $\frac{14}{9n^2+3} < \frac{1}{100}$, $\quad n > 12{,}46$.

Ha n páratlan: $\frac{16}{9n^2+3} < \frac{1}{100}$, $\quad n > 13{,}32$.

Tehát a 14. tagtól kezdve esnek a tagok a határérték $\varepsilon = 0{,}01$ sugarú környezetébe.

73. a) Szigorúan monoton növekedő; konvergens: $\lim a_n = 50$; korlátos:

$\inf a_n = \frac{93}{7}$ és $\sup a_n = 50$; $n_0 = 12847$.

b) $a_n = \begin{cases} \dfrac{100n-7}{2n+5}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\dfrac{100n-7}{2n+5}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{n \text{ páros}} a_n = 50$, $\quad \lim\limits_{n \text{ páratlan}} a_n = -50$

Nem monoton; divergens; korlátos: $\inf a_n = -50$ és $\sup a_n = 50$.

c) Monoton növekedő; konvergens: $\lim a_n = 2$; korlátos: $\inf a_n = \dfrac{3}{2}$ és $\sup a_n = 2$; $n_0 = 198$.

d) $a_n = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n - 5$; nem monoton; konvergens: $\lim a_n = -5$; korlátos: $\inf a_n = -\dfrac{27}{5}$ és $\sup a_n = -4\dfrac{21}{25}$; $n_0 = 5$.

e) Nem monoton; nem korlátos, csak alulról: $\inf a_n = 0$; divergens.

f) Szigorúan monoton növekedő; konvergens: $\lim a_n = \dfrac{17}{99}$; korlátos: $\inf a_n = 0{,}17$ és $\sup a_n = \dfrac{17}{99}$; $n_0 = 1$.

g$^\blacktriangle$) Nem monoton; konvergens:

$$0 < a_n = \frac{20}{1}\cdot\frac{20}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{20}{20}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{20}{22}\cdot\ldots\cdot\frac{20}{n} \le \frac{20^{20}}{20!}\cdot\left(\frac{20}{21}\right)^{n-20} =$$

$$= \frac{20^{20}}{20!}\cdot\left(\frac{20}{21}\right)^{n}\cdot\left(\frac{20}{21}\right)^{-20} \to 0$$

A „rendőrelv” (TK. 3.8. tétel) miatt $\lim a_n = 0$.

Korlátos: $\inf a_n = 0$ és $\sup a_n = a_{19} = a_{20} = \dfrac{20^{19}}{19!}$.

3.4 Speciális divergens sorozatok

74. a) $\lim\left[n^5\left(-2-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}+\dfrac{5}{n^5}\right)\right] = \infty\cdot(-2) = -\infty$

(a_n) tágabb értelemben konvergens.

b) $\lim\dfrac{5n^6+8}{2-10n^5} = -\infty$ (A számláló magasabb fokú, mint a nevező.)

c) A tagok külön-külön ∞-be tartanak (a számláló magasabb fokú a nevezőnél), ebből következik, hogy az összegük is: $\lim a_n = \underline{\underline{\infty}}$.

d) A kisebbítendő és a kivonandó külön-külön ∞-hez tart. Ebből a tényből azonban a különbség konvergenciájával kapcsolatban még semmire sem tudunk következtetni. Hozzuk közös nevezőre a kifejezést!

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n+1} - \frac{2n^2-n}{4n+1} = \frac{n^2+9n+2}{8n^2+6n+1}.$$

A kapott racionális tört konvergens (a számláló azonos fokú a nevezővel), így: $\lim a_n = \frac{1}{8}$.

e) Egyszerűsítsünk n-nel: $\lim \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+1} = \infty$.

f)
$$\lim \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{2}{2} = 1$$

g) $\lim\left[\dfrac{1}{0{,}6^2}\cdot\left(\dfrac{7}{6}\right)^n\right] = \dfrac{1}{0{,}6^2}\cdot\infty = \infty$, mert $\lim\left(\dfrac{7}{6}\right)^n = \infty$. (TK. 3.10. tétel)

h)
$$\lim\left[\frac{3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right]^{\frac{n}{2}} = \lim\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{n}\right)^n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\infty\cdot\frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty$$

75. a) $a_n = -n^2\left(1-\dfrac{10}{n^2}\right)$, $\lim a_n = -\infty$.

$10-n^2 < -600$, $n^2 > 610$, $n > 24{,}7$, tehát a 25. tagtól.

b) $\lim a_n = -\infty$; a 361. tagtól.

c) $\lim a_n = -\infty$; a 10. tagtól.

76. a) $\lim a_n = \infty$; $n^4 > 10^4$, $n > 10$, tehát a 11. tagtól.

b) $\lim a_n = \infty$; a 11. tagtól.

c) $\lim a_n = \infty$; az 5002. tagtól.

3.5 Végtelen sorok

77. a) Mértani sor: $q = \frac{1}{3}$, $|q| < 1 \Rightarrow$ a sor konvergens és összege:

$$s = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

b) $q = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ a sor divergens.

c) $q = -\frac{1}{5}$, $|q| < 1$, $s = \frac{-\frac{6}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = -1$.

d) $q = -\frac{6}{5} < -1 \Rightarrow$ a sor divergens.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 7 \cdot 4^n$, $q = 4 > 1 \Rightarrow$ a sor divergens.

f) $-\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^3 + ... = \frac{-\frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = -\frac{4}{13}$, így a sor összege: $3 - \frac{4}{13} = \frac{35}{13}$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$, így a sor összege: $10\frac{2}{3}$.

h▲) Használjuk fel a következő összefüggést: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Így a sor n-edik részletösszege:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Mivel $\lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, ezért a sor konvergens és összege: 1.

78. a) $0{,}5\dot{5} = \dfrac{5}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} + \ldots = \dfrac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{5}{9}$

b) $0{,}\dot{3}\dot{1} = \dfrac{31}{10^2} + \dfrac{31}{10^4} + \dfrac{31}{10^6} + \ldots = \dfrac{0{,}31}{1 - 0{,}01} = \dfrac{31}{99}$

c) $2{,}\dot{3}4\dot{5} = 2 + \dfrac{345}{10^3} + \dfrac{345}{10^6} + \ldots = 2 + \dfrac{0{,}345}{1 - 0{,}001} = 2 + \dfrac{345}{999} = \dfrac{2343}{999}$

79. a) $s_n = \dfrac{4}{10} + \dfrac{4}{10^2} + \ldots + \dfrac{4}{10^n}$; szigorúan monoton növekedő, mert

$s_{n+1} - s_n = \dfrac{4}{10^{n+1}} > 0$ minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén.

Konvergens: $\lim s_n = \dfrac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{4}{9}$. Korlátos: $\inf s_n = 0{,}4$

és $\sup s_n = \dfrac{4}{9}$. $\quad s_n = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{9} \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$.

$\left| \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{9} \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^n - \dfrac{4}{9} \right| = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{10^6}, \quad 10^n > \dfrac{4}{9} \cdot 10^6, \quad n > 5{,}65,$

$n_0 = 5.$

b) Nem monoton, konvergens: $\lim s_n = \dfrac{3}{1 + \frac{1}{7}} = \dfrac{21}{8}$,

korlátos: $\inf s_n = s_2 = \dfrac{18}{7}$ és $\sup s_n = s_1 = 3$.

$\left| \dfrac{21}{8} - \dfrac{21}{8} \left(-\dfrac{1}{7}\right)^n - \dfrac{21}{8} \right| = \dfrac{21}{8} \cdot \dfrac{1}{7^n} < \dfrac{1}{10^6}, \quad 7^n > \dfrac{21}{8} \cdot 10^6, \quad n_0 = 7.$

80. a) Mivel $\lim \frac{1-10n^2}{2n^2} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ a sor divergens.

b) Mivel $\lim \left(1+\frac{5}{n}\right)^n = e^5 \neq 0 \Rightarrow$ a sor divergens.

c) Mivel $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{0{,}4^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{0{,}4^n} = \frac{0{,}4n}{n+1} < \frac{0{,}4n}{n} = 0{,}4 < 1 \Rightarrow$ a sor konvergens.

d) Mivel $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{3}n}{n+1}\right| = \frac{\frac{n}{3}}{n+1} < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ a sor

konvergens.

3.6 Vegyes feladatok

81. a) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-n\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} =$

$= \lim \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = \frac{-1}{2}$

b) $\lim \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3^n}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty$

c) $\lim\limits_{n \text{ páros}} a_n = 2 \neq \lim\limits_{n \text{ páratlan}} a_n = -2 \Rightarrow (a_n)$ divergens.

d) $\lim\limits_{n \text{ páros}} \frac{3^{n+1}}{2+3^n} = \lim \frac{3}{\frac{2}{3^n}+1} = 3$; $\lim\limits_{n \text{ páratlan}} \frac{3n^2}{n^2+1} = 3$

A két határérték egyenlő $\Rightarrow \lim a_n = 3$.

e) $\lim\left[\frac{1}{1+2n+3n^2} \cdot \operatorname{sgn}(n-10)\right] = 0$, mert $\lim \frac{1}{1+2n+3n^2} = 0$ és $(\operatorname{sgn}(n-10))$ korlátos.

f) $$\lim\frac{\sqrt[6]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[6]{n^9}}+\lim\frac{\left(1+\frac{-\frac{5}{8}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{3}{8}}{n}\right)^n}=\lim\sqrt[6]{\frac{n^4+\dots}{n^9}}+\frac{e^{-\frac{5}{8}}}{e^{\frac{3}{8}}}=0+e^{-1}=e^{-1}$$

82. Az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekedő, mert $\left(1-\frac{1}{n+3}\right)$ szigorúan monoton növekedő, és egyre nagyobb számnak a 10. hatványa is egyre nagyobb. A sorozat konvergens: $\lim\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{10}=1$.

A (b_n) sorozat nem monoton, mert előjelváltó.

$$\lim_{n\,\text{páros}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n=\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}=\frac{e^2}{e^3}=\frac{1}{e};\qquad \lim_{n\,\text{páratlan}}\left[-\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right]=-\frac{1}{e}.$$

A két részsorozat határértéke nem egyezik meg, tehát a (b_n) sorozat divergens.

83. a) $$\lim\frac{2n+1}{5n-3}\cdot\lim\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{5n-3}\right)^n}=\frac{2}{5}\cdot\lim\left(\frac{5n-3}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\lim\left[\left(\frac{5}{2}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{-\frac{3}{5}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n}\right]=\frac{2}{5}\cdot\infty\cdot\frac{e^{-\frac{3}{5}}}{e^{\frac{1}{2}}}=\infty\quad\text{(divergens).}$$

b) $\lim\left(2+\frac{1}{2n^2}\right)=2$ (konvergens).

Szigorúan monoton csökkenő; korlátos: $\inf a_n=2,\quad \sup a_n=2{,}5$.

c) $\lim\limits_{n \text{ páros}} a_n = \frac{1}{3} \neq \lim\limits_{n \text{ páratlan}} a_n = -\frac{1}{3} \Rightarrow (a_n)$ divergens.

84. a) $(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \ldots)$ Monoton növekedő; nem korlátos, csak alulról: $\inf a_n = 0$; divergens; $\lim a_n = \infty$.

b) $a_n = \dfrac{n-3}{2n+2}$ szigorúan monoton növekedő; konvergens: $\lim a_n = \dfrac{1}{2}$;

korlátos: $\inf a_n = -\dfrac{1}{2}$ és $\sup a_n = \dfrac{1}{2}$; a 2000. tagtól.

c) Konvergens: $\lim a_n = 0$; szigorúan monoton csökkenő; korlátos:

$\inf a_n = 0$ és $\sup a_n = \dfrac{2}{11}$; a 9. tagtól.

85. Mindkét sor végtelen mértani sor.

a) $10 + 10^2 + 10^3 + \ldots$ divergens, mert $q = 10 > 1$;

(s_n) szigorúan monoton növekedő; nem korlátos, csak alulról:

$\inf s_n = s_1 = 10$.

b) $q = 0{,}01$, $|q| < 1 \Rightarrow (s_n)$ (és a végtelen sor) konvergens:

$\lim s_n = \dfrac{0{,}99}{1-0{,}01} = 1$; (s_n) szigorúan monoton növekedő; korlátos:

$\inf s_n = s_1 = 0{,}99$ és $\sup s_n = 1$.

$\left|1 - \dfrac{1}{100^n} - 1\right| = \dfrac{1}{100^n} < \dfrac{1}{10^6}$, $\quad 10^{2n} > 10^6$, $\quad n_0 = 3$.

3.7 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Nem. Gondoljuk meg, hogy ezen meghatározás alapján pl. az $a_n = (-1)^n$ sorozatnak a -1 és az 1 is határértéke lenne. (A helyes definíció a TK. 58. oldalán szerepel.)

b) Igen. Ez a meghatározás ekvivalens a TK. definíciójával, hiszen ha n_0-lal jelöljük a küszöbszámot, akkor A ε sugarú környezetén kívül maximum n_0 db tagja lehet a sorozatnak.

2. a) Hamis, mert van olyan konvergens sorozat, amelyik nem monoton.

Pl. $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$.

b) Hamis, ugyanis van ellenpélda:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \quad \text{és} \quad \lim\frac{1}{n}=0, \qquad \text{de} \quad \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim(n+1)=\infty$$

(A tétel csak akkor igaz, ha kikötjük, hogy a nevező nem nullához tart. Lásd: 3.7. tétel.)

c) Hamis, mert pl. $\lim\frac{1}{n}=0$, $\lim n^2=\infty$ és $\lim\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right)=\lim n=\infty$.

(Lásd: 3.6. tétel.)

d) Igaz, mert az Euler-féle szám (e) irracionális szám.

e) Hamis, mert pl. $a_n=\begin{cases}2n, & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros}\end{cases}$

$\lim a_n=\infty$, de (a_n) nem monoton növekedő.

f) Hamis. Ha ugyanis a monoton sorozat korlátos is, akkor konvergens.

g) Hamis. Ellenpélda: a 84/b feladatban szereplő (a_n) sorozat két plusz végtelenbe tartó sorozat különbsége és $\lim a_n=\frac{1}{2}(\neq 0!)$.

h) Igaz, mert a mértani sorok csak $|q|<1$ esetén konvergensek.

i) Hamis. Ellenpélda: a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens (TK. 3.17. példa). (Az állítás fordítva igaz. Lásd a TK. 3.13. tételét.)

3. Az A válasz a helyes, ugyanis

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2-4n}{2n+3}-\frac{6-4n}{2n+1}=\frac{-16}{(2n+3)(2n-1)}<0 \quad \text{minden} \quad n\in\mathbf{N}^+ \quad \text{esetén}$$

$\Rightarrow$ (a_n) szigorúan monoton csökkenő.

4. A B válasz a helyes, mert

$\left(\frac{3}{8^n}\right)$ szigorúan monoton csökkenő $\Rightarrow$ (a_n) szigorúan monoton növekedő

$\Rightarrow$ $\inf a_n=a_1=\frac{61}{8}$ és $\sup a_n=\lim a_n=8$.

5. A C válasz a helyes, ugyanis

$$\lim_{n\text{ páros}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq\lim_{n\text{ páratlan}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

6. A B válasz a helyes, mert

$$\left| 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10\,000},$$

ahonnan $n > 9\,999$ adódik.

7. Az A válasz a helyes, mert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

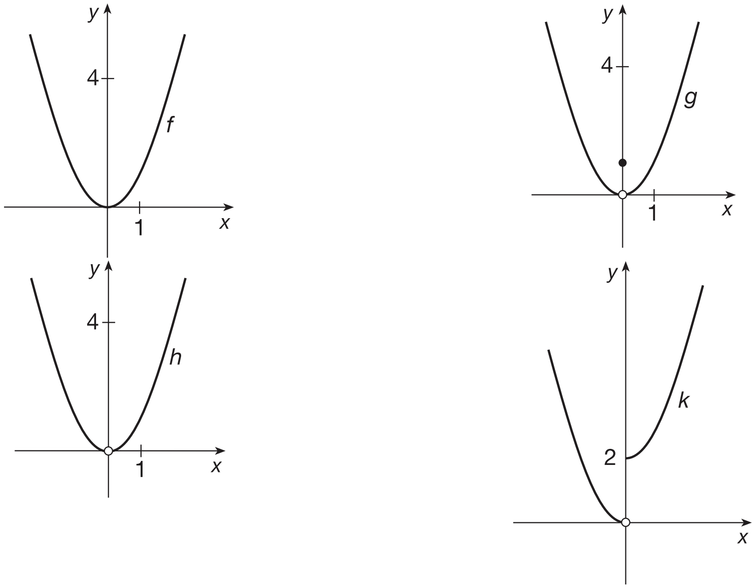
végtelen mértani sor, ahol $q = \frac{1}{6}$.

Mivel $|q| < 1 \Rightarrow$ a sor konvergens és összege: $\dfrac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \dfrac{1}{5}$.

4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

4.1 Függvények határértéke véges helyen; folytonosság

86. a)



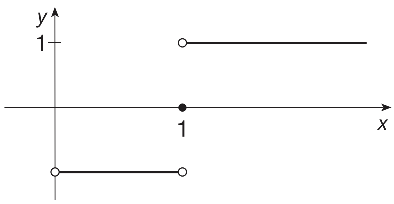
M 30. ábra

$\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} g(x) = \lim\limits_{0} h(x) = 0$, de $\lim\limits_{0} k(x)$ nem létezik, ugyanis

$\lim\limits_{0+0} k(x) = \lim\limits_{0+0}(x^2 + 2) = 2 \neq \lim\limits_{0-0} k(x) = \lim\limits_{0-0} x^2 = 0$.

b) $f : x \mapsto \operatorname{sgn} \ln x = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{1+0} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{1-0} f(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{1} f(x)$ nem létezik.



M31. ábra

c) Lásd. TK. 2.13 ábra!

$\lim\limits_{0+0} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{0-0} f(x) = -1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{0} f(x)$ nem létezik.

d) Lásd. TK. 4.12 ábra!

$\lim\limits_{2+0} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{2-0} f(x) = 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{2} f(x)$ nem létezik;

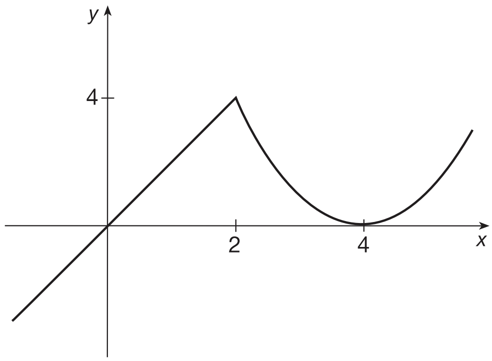
$\lim\limits_{0,5} f(x) = f(0,5) = 0,5$.

87. a) c) és d) igaz; b) és e) hamis.

88. Csak az f függvény folytonos.

89. Csak az $x_0 = 1$ helyen folytonos.

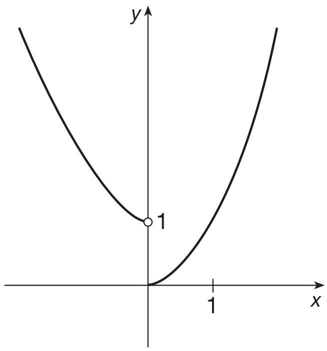
90. a)



M 32. ábra

$\lim\limits_{2-0} f(x) = \lim\limits_{2-0} 2x = 4 = \lim\limits_{2+0} f(x) = \lim\limits_{2+0}(x-4)^2 \;\Rightarrow$ létezik határérték az $x_0 = 2$ helyen: $\lim\limits_{2} f(x) = 4$ és mivel $\lim\limits_{2} f(x) = f(2)$, ezért f folytonos az $x_0 = 2$ pontban.

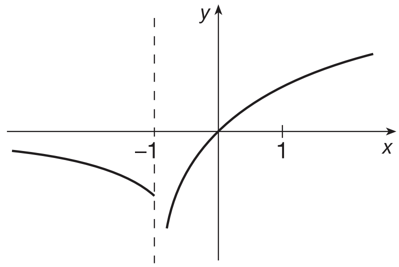
b)



M 33. ábra

$$\lim_{0-0} f(x) = \lim_{0-0}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \neq \lim_{0+0} f(x) = \lim_{0+0} x^2 = 0 \;\Rightarrow\;$$ nem létezik határérték az $x_0 = 0$ helyen, ezért itt nem folytonos a függvény.

c)



M 34. ábra

$$\lim_{-1+0} f(x) = \lim_{-1+0} \ln(1+x) = -\infty \;\Rightarrow\;$$ nem létezik határértéke a függvénynek az $x_0 = -1$ helyen, s ezért itt nem is folytonos.

91. a) $\lim\limits_{0}(7x^8 + 2x^3 - 3) = f(0) = -3$; $\lim\limits_{1} f(x) = f(1) = 6$

b) $\lim\limits_{5}\dfrac{25 - x^2}{x+5} = f(5) = 0$; $\lim\limits_{-5}\dfrac{(5-x)(5+x)}{x+5} = \lim\limits_{-5}(5-x) = 10$

c) $\lim\limits_{0}\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 12} = f(0) = -\dfrac{1}{3}$; $\lim\limits_{4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-3)(x-4)} = \lim\limits_{4}\dfrac{x+1}{x-3} = 5$;

$\lim\limits_{3-0}\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{4}{-0} = -\infty \neq \lim\limits_{3+0}\dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{4}{+0} = \infty \;\Rightarrow$ Tágabb értelemben vett határértéke sincs a függvénynek az $x_0 = 3$ helyen.

d) $\lim\limits_{-4}\dfrac{x \cdot 3(x+4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{-4}\dfrac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x-4} = \dfrac{13}{8}$; $\lim\limits_{0}\dfrac{3x-1}{x-4} = \dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{4-0}\dfrac{3x-1}{x-4} = \dfrac{11}{-0} = -\infty \neq \lim\limits_{4+0}\dfrac{3x-1}{x-4} = \dfrac{11}{+0} = \infty \;\Rightarrow$ Tágabb értelemben vett határértéke sincs a függvénynek az $x_0 = 4$ helyen.

e) $\lim\limits_{0}\dfrac{x^5 - 1}{x^4 - 1} = f(0) = 1$; $\lim\limits_{1}\dfrac{(x-1)\,(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \dfrac{5}{4}$

f) $\lim\limits_{3}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2 - 1}\right) = f(3) = \dfrac{3}{8}$; $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

$\lim\limits_{1\pm0} f(x) = \lim\limits_{1\pm0} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty \;\Rightarrow$ Tágabb értelemben vett határértéke sincs a függvénynek az $x_0 = 1$ helyen.

g) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{0} \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}$

A konjugálttal bővítettük, majd x-szel egyszerűsítettük a törtet.

h▲) Legyen $u^3 = x+1$. Ha $x \to 0 \Rightarrow u \to 1$.

$\lim\limits_{1} \dfrac{1-\sqrt[3]{u^3}}{u^3-1} = \lim\limits_{1} \dfrac{1-u}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim\limits_{1} \dfrac{-1}{u^2+u+1} = -\dfrac{1}{3}$

92. a) $\lim\limits_{0} \dfrac{x^2+6x-16}{2x-4} = 4 \neq f(0) = 8 \;\Rightarrow\; f$ az $x_0 = 0$ helyen nem folytonos.

$\lim\limits_{2} \dfrac{(x+8)(x-2)}{2(x-2)} = \lim\limits_{2} \dfrac{x+8}{2} = 5 = f(2) \;\Rightarrow$ Az $x_0 = 2$ helyen folytonos a függvény.

b) $\lim\limits_{-7} \dfrac{(x-7)(x+7)}{x(x+7)} = \lim\limits_{-7} \dfrac{x-7}{x} = 2 = f(-7) \;\Rightarrow$ Az $x_0 = -7$ helyen folytonos a függvény.

$\lim\limits_{0\pm0} \dfrac{x-7}{x} = \mp\infty \;\Rightarrow$ Nincs határérték, tehát nem folytonos az $x_0 = 0$ helyen a függvény.

93. a) $\lim\limits_{2-0} A \cdot \dfrac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{2-0} A \cdot \dfrac{x-7}{x-6} = \dfrac{5}{4}A$

$\lim\limits_{2+0} \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{2+0} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{3} \qquad \dfrac{5}{4}A = \dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; A = \dfrac{8}{15}$ esetén,

ha $f(2) = \dfrac{2}{3}$, akkor folytonos az $x_0 = 2$ helyen a függvény.

b) $\lim\limits_{0-0}(4x^5+3x^2-1) = -1 \qquad \lim\limits_{0+0} \ln x = -\infty$

Nem létezik a $\lim\limits_{0} f(x) \;\Rightarrow$ nincs olyan A érték, amely folytonossá tenné a függvényt.

94. a) $\lim\limits_{5} \dfrac{4x+5}{(x-10)^4} = \dfrac{1}{25} = A \qquad \lim\limits_{10\pm0} \dfrac{4x+5}{(x-10)^4} = \infty \;\Rightarrow$ Nem létezik olyan B érték, amely a $x_0 = 10$ helyen folytonossá tenné a függvényt.

b) $\lim\limits_{6} \dfrac{2x(x-6)(x+5)}{(x-6)(x+8)} = \lim\limits_{6} \dfrac{2x(x+5)}{x+8} = \dfrac{66}{7} = B$

$\lim\limits_{-8\pm 0} \dfrac{2x(x+5)}{x+8} = \pm\infty \quad \Rightarrow$ Nem létezik olyan A érték, amely az $x_0 = -8$ helyen folytonossá tenné a függvényt.

95. a) $\lim\limits_{2} \dfrac{e^{x-2}-1}{x-2} = 1$ (Lásd TK. 4. fejezet 5. példa!)

b) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x(e^x-1)}{x} = \lim\limits_{0}\left(e^x \cdot \dfrac{e^x-1}{x}\right) = e^0 \cdot 1 = 1$

c) $\lim\limits_{3} \dfrac{e^3(1-e^{x-3})}{3-x} = \lim\limits_{3}\left(e^3 \cdot \dfrac{e^{x-3}-1}{x-3}\right) = e^3 \cdot 1 = e^3$

4.2 Függvények határértéke a végtelenben

96. a) $\lim\limits_{\pm\infty}\left[x^6\left(-6+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^4}\right)\right] = \infty \cdot (-6) = -\infty$

b) $\lim\limits_{\pm\infty}\left[x^3\left(-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = \pm\infty \cdot (-3) = \mp\infty$

c) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^7-4x^5+x}{3x^5+2x^4-3x-2} = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^7\left(2-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^6}\right)}{x^5\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{x^5}\right)} =$

$= \lim\limits_{\pm\infty}\left(x^2 \dfrac{2-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{x^5}}\right) = \infty \cdot \dfrac{2}{3} = \infty$

d) $\lim\limits_{\pm\infty}\left(-x \cdot \dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^5}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^4}}\right) = \mp\infty$

e) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{(x-3)^3}{(x-1)^4} = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^3+\ldots}{x^4+\ldots} = 0$

f) $\lim\limits_{\pm\infty}\left(\dfrac{3+2x^2}{x+2} - \dfrac{4+2x^2}{x+3}\right) = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^2-x+1}{x^2+5x+6} = 2$

97. a) $\lim\limits_{\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}-2}{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}=-2$

b) A konjugálttal való bővítés után:

$$\lim_{\pm\infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\lim_{\pm\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}+2}=-\frac{1}{4}$$

c) $\lim\limits_{\infty}\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}\right)\right]=\infty$, mivel

$$\lim_{\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)=\sqrt{2}-1>0$$

d) $\lim\limits_{\pm\infty}\left(\{x\}\cdot\dfrac{1}{x^4+x^3+1}\right)=0$, mert az $x\to\{x\}$ törtrész-függvény

korlátos és $\lim\limits_{\pm\infty}\dfrac{1}{x^4+x^3+1}=0$.

e) $$\lim_{\infty}\left[\frac{6x\left(1+\dfrac{\frac{1}{3}}{x}\right)}{3x\left(1+\dfrac{-\frac{1}{3}}{x}\right)}\right]^x=\lim_{\infty}\left[2^x\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\frac{1}{3}}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{-\frac{1}{3}}{x}\right)^x}\right]=\infty\cdot e^{\frac{2}{3}}=\infty$$

4.3* Trigonometrikus függvények határértéke és folytonossága

98. a) $\lim\limits_{0}\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}0=0$, ugyanis az $f(x)=\operatorname{tg}x$ és $g(x)=3x$ függvények folytonosságából következik, hogy az $f\circ g$ függvény is folytonos a 0 helyen (TK. 4.6. tétel).

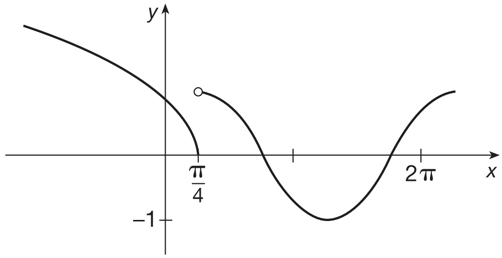
b)

$$\lim_{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{” típusú}\right)=\lim_{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=\lim_{\frac{\pi}{2}}(2\sin x)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$$

c▲) Legyen $u = \text{ctg}x$. Ha $x \to 0+0 \Rightarrow u \to \infty$.

$$\lim_{0+0}(1+\text{tg}x)^{\text{ctg}x} = \lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

99. a)



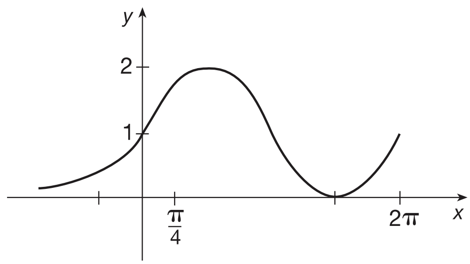
M 35. ábra

$$\lim_{\frac{\pi}{4}+0} f(x) = \lim_{\frac{\pi}{4}+0}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{\frac{\pi}{4}-0} f(x) = \lim_{\frac{\pi}{4}-0}\sqrt{\frac{\pi}{4}-x} = \sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}} = 0$$

Mivel a jobb és bal oldali határérték nem egyezik meg, ezért nem létezik határértéke a függvénynek az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ helyen, és így nem is folytonos ebben a pontban.

b)



M 36. ábra

$\lim_{0-0} f(x) = \lim_{0-0} e^{x} = 1 = \lim_{0+0} f(x) = \lim_{0+0}(1+\sin x) \Rightarrow$ létezik határérték az $x_0 = 0$ helyen: $\lim_{0} f(x) = 1$ és mivel $\lim_{0} f(x) = f(0)$, ezért a függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

100. a) $\lim\limits_{0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)=1\cdot\frac{7}{2}\cdot 1=\frac{7}{2}$

b) $\lim\limits_{0}\left(\frac{\sin^2 x}{3x^2}-\frac{tg^2 3x}{3x^2}\right)=\lim\limits_{0}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\right]=-\frac{8}{3}$

c) $\lim\limits_{\pi}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}=\frac{-1-(-1)}{4\pi^2}=0$

Az $x_0=0$ helyen vett határérték megállapításához fölhasználjuk a

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ összefüggést:

$$\lim_{0}\frac{-2\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x}{4x^2}=\lim_{0}\left(-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=-3$$

d) $$\lim_{0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{1-\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{0}\frac{1}{(\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{1}\frac{\sin\ln x}{\ln x}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{e}\frac{\sin\ln x}{\ln x}=\frac{\sin 1}{1}=\sin 1$

101. a) $\lim\limits_{\pm\infty}\left(\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)=0$, mert az $x\mapsto\sin x$ függvény korlátos és $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{1}{x}=0$.

b) $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{\cos(x^4+3x^2+1)}{x^5+3x}=0$, mert az $x\mapsto\cos(x^4+3x^2+1)$ függvény korlátos és $\lim\limits_{\pm\infty}\frac{1}{x^5+3x}=0$.

102. a) $\lim\limits_{2}\left[\frac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}\right]=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1\pm 0}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{\sin(-1)}{(-1)(\pm 0)}=\pm\infty$

$$\lim_{\pm\infty}\left[\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{x^2-3x+2}}\cdot\underbrace{\sin(x-2)}_{\text{korlátos}}\right]=0.$$

b) $\lim\limits_{0}\frac{(x-\pi)\sin^2 2x}{x^2(x-\pi)}=\lim\limits_{0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4=1\cdot 4=4.$

$$\lim_{\pi} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = 0 \qquad \lim_{\pm\infty}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \underbrace{\sin^2 2x}_{\text{korlátos}}\Big) = 0.$$

103. a) $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg}x} - \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}x}\right) = \lim\limits_{0}\left[\left(\dfrac{x}{\sin x} - \dfrac{\sin 4x}{\sin x}\right)\cos x\right] =$

$= \lim\limits_{0}\left[\left(\dfrac{x}{\sin x} - \dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)\cos x\right] = (1-4)\cdot 1 = -3 \neq f(0) =$

$= 4 \;\Rightarrow\;$ Az $x_0 = 0$ helyen nem folytonos a függvény.

b) $\lim\limits_{1-0}\dfrac{3x^2(x-1)-(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{1-0}\dfrac{(x-1)(3x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{1-0}(3x^2-1) = 2$

$\lim\limits_{1+0}\dfrac{\sin(2x-2)}{x-1} = \lim\limits_{1+0}\dfrac{\sin(2x-2)}{2x-2}\cdot 2 = 2$

$\lim\limits_{1-0} f(x) = \lim\limits_{1+0} f(x) \;\Rightarrow\;$ létezik a $\lim\limits_{1} f(x) = 2$, és mivel

$\lim\limits_{1} f(x) = f(1)$, ezért a függvény folytonos az $x_0 = 1$ helyen.

104. $\lim\limits_{0}\left[(1+\operatorname{ctg}2x)\sin 8x\right] = \lim\limits_{0}\left(\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot 8\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x + \sin 8x\right) =$

$= 1\cdot 8\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 + 0 = 4 \;\Rightarrow\; f(0) = A = 4$

105. $\lim\limits_{0-0}\left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right) = \lim\limits_{-\infty}(e^y + 1) = 1 \qquad \lim\limits_{0+0}\left(A\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{x+2}\right) = \dfrac{A}{2}$

$\dfrac{A}{2} = 1 \;\Rightarrow\; A = 2$ és $B = 1$

106. $\lim\limits_{0}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{e^{x-3}-1}{x-3}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{e^{-3}-1}{-3} = \dfrac{1-e^{-3}}{6} = A$

$\lim\limits_{3}\left(\dfrac{x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{e^{x-3}-1}{x-3}\right) = \dfrac{3}{\sin 6}\cdot 1 = \dfrac{3}{\sin 6} = B$

$\lim\limits_{\pi\pm 0}\dfrac{x\cdot e^{x-3} - x}{(x-3)\sin 2x} = \dfrac{\pi(e^{\pi-3}-1)}{(\pi-3)(\pm 0)} = \pm\infty$ Nincs megfelelő C érték.

4.4 Vegyes feladatok

107. a) $\lim\limits_{2} \dfrac{(2-x)(2+x)(4+x^2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{2} \dfrac{(2+x)(4+x^2)}{-(x-1)} = -32$

$\lim\limits_{1\pm 0} \dfrac{(2+x)(4+x^2)}{1-x} = \dfrac{15}{\mp 0} = \mp\infty \qquad \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{16-x^4}{x^2-3x+2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{2} \dfrac{(2x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{2} \dfrac{2x-3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{-2\pm 0} \dfrac{2x-3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{-7}{\pm 0 \cdot (-3)} = \pm\infty$

$\lim\limits_{1\pm 0} \dfrac{2x-3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{-1}{\pm 0 \cdot 3} = \mp\infty \qquad \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x^2-7x+6}{x^3-x^2-4x+4} = 0$

108. a) $\lim\limits_{0+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, $\quad \lim\limits_{0-0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$, $\quad$ tehát $\lim\limits_{0} e^{-\frac{1}{x}}$ nem létezik.

$\lim\limits_{\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

b) $\lim\limits_{\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (Lásd TK. 4.7. fejezet végén: $\lim\limits_{\infty} \dfrac{P_n(x)}{a^x} = 0,\ \ a > 1$)

$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{-\infty} (x \cdot e^{-x}) = (-\infty)\infty = -\infty$

c) $\lim\limits_{\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{\infty} \ln e^2 = 2$

109. $\lim\limits_{-2} \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x^2-1)(x-1)\,(x+2)} = \lim\limits_{-2} \dfrac{x+4}{(x-1)^2(x+1)} = -\dfrac{2}{9} = A$

$\lim\limits_{-1\pm 0} \dfrac{x+4}{(x-1)^2(x+1)} = \pm\infty \qquad \lim\limits_{1\pm 0} \dfrac{x+4}{(x-1)^2(x+1)} = \infty$

Nincs megfelelő B és C érték.

110. $f(x) = \begin{cases} \ln x\ , & \text{ha } \ x > 0 \\ \ln(-x), & \text{ha } \ x < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{0+0} f(x) = \lim\limits_{0+0} \ln x = -\infty = \lim\limits_{0-0} f(x) = \lim\limits_{0-0} \ln(-x)$

Nincs határérték $\Rightarrow$ nem megszüntethető szakadási hely az $x_0 = 0$ pont.

111. a) $\lim\limits_{0-0} f(x) = \lim\limits_{0-0}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0 - 1 = -1$

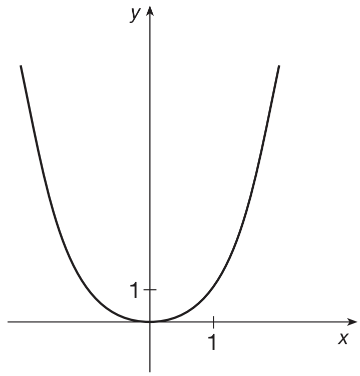
$\lim\limits_{0+0} f(x) = \lim\limits_{0+0}\dfrac{x-1}{x+1} = -1$

Tehát $\lim\limits_{0} f(x) = -1$, s mivel $\lim\limits_{0} f(x) = f(0)$, ezért f folytonos a 0 pontban. Így f a teljes értelmezési tartományon $(D_f = \mathbf{R})$ folytonos.

b$^\blacktriangle$) Belátható, hogy f csak az $x_0 = 0$ helyen folytonos, ugyanis ha egy (x_n) sorozat tart x_0-hoz, akkor a racionális tagok részsorozata x_0-hoz, az irracionális tagok részsorozat $-x_0$-hoz tart. E két határérték csak $x_0 = 0$ esetén lehet egyenlő, és ekkor a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

112. a) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -x^3, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

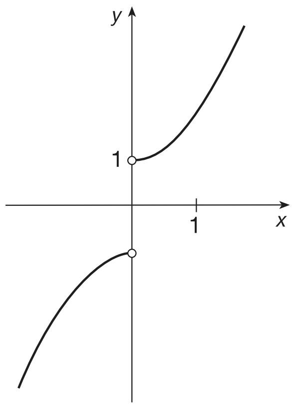
f mindenütt $(x \in \mathbf{R})$ folytonos.



M 37. ábra

b) $f(x) = \begin{cases} -(x^2+1), & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2+1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

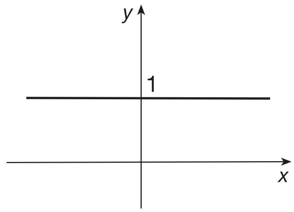
f az $x = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos.



M 38. ábra

c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2+1) = 1$

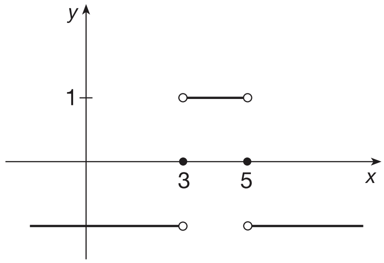
f mindenütt $(x \in \mathbf{R})$ folytonos.



M 39. ábra

d) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 3 \text{ vagy } x > 5 \\ 0, & \text{ha } x = 3 \text{ vagy } x = 5 \\ 1, & \text{ha } 3 < x < 5 \end{cases}$

f az $x = 3$ és $x = 5$ helyeken kívül mindenütt folytonos.



M 40. ábra

4.5 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Nem helyes. A határérték létezéséhez ugyanis azt kell belátni, hogy *bármely* 1-hez tartó (x_n) sorozat $(x_n \in D_f$ és $x_n \neq 1)$ esetén a megfelelő függvényértékek $f(x_n)$ sorozata *mindig* konvergens.
(Lásd a definíciót a TK. 83. oldalán.)

2. a) Hamis. A folytonossághoz nemcsak a határértéknek, hanem a helyettesítési értéknek is léteznie kell az adott pontban és e két értéknek egyenlőnek is kell lennie. (Lásd a definíciót a TK. 87. oldalán.)
b) Igaz.
c) Hamis; ugyanis lehet, hogy a jobb és bal oldali határértékek nem egyenlők, vagyis még határértéke sincs a függvénynek az x_0 pontban.
d) Hamis; ugyanis az $x_0 = -1$ helynek nincs olyan környezete, amelynek minden pontjában (kivéve -1-et) folytonos lenne a függvény.
(Lásd a definíciót a TK. 90. oldalán.)
e) Igaz.

3. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2}, & \text{ha } x \in \mathbf{R} - \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

Mivel $\lim\limits_{0} f(x)=\lim\limits_{0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{0} x=0$, ezért, ha az $x_0=0$ pontban a függvényértéket 0-ra változtatjuk, akkor a függvény az $x_0=0$ helyen folytonos lesz.

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2}$, ha $x\in \mathbf{R}-\{0\}$ $\quad x_0=0$

Mivel $\lim\limits_{0} f(x)=\lim\limits_{0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{0} x=0$, ezért, ha kiterjesztjük a függvény értelmezését az $x_0=0$ helyre úgy, hogy $f(0)=0$ legyen, akkor a függvény az $x_0=0$ pontban folytonos lesz.

c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\quad x_0=2$, mert $\lim\limits_{2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$.

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ $\quad x_0=0$, mert $\lim\limits_{0-0}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$ és $\lim\limits_{0+0}\dfrac{1}{x^3}=\infty$.

4. A C válasz a helyes, ugyanis

$$\lim_{8}\frac{4x^2-33x+8}{x^2-8x}\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{” típusú}\right)=\lim_{8}\frac{4(x-8)\left(x-\frac{1}{4}\right)}{x(x-8)}=\lim_{8}\frac{4x-1}{x}=\frac{31}{8}$$

$\dfrac{31}{8}=f(8)\quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{31}{8}$.

5. A B válasz a helyes.

$$\lim_{4+0} f(x)=\lim_{4+0}\operatorname{sgn}(x^2-3x+2)=\lim_{4+0}1=1=f(4)$$

$$\lim_{4-0} f(x)=\lim_{4-0}\left(a+e^{-\frac{1}{(x-4)^2}}\right)=a+0=a$$

Tehát $a=1$ esetén folytonos a függvény az $x_0=4$ helyen.

6. A C válasz a helyes, mert

$$\lim_{-1}\frac{x^4-1}{(x+1)^3}\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{” típusú}\right)=\lim_{-1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x+1)^3}=$$

$$=\lim_{-1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^3}=\lim_{-1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)^2}=\frac{-4}{+0}=-\infty.$$

7. Az A válasz a helyes, mert

$$\lim_{\infty} \frac{1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{+0} = \infty .$$

5. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

5.1 A differenciálhányados fogalma; a deriváltfüggvény

113. a) $\dfrac{f(5)-f(4)}{5-4}=\dfrac{132-71}{1}=61$

b) $\dfrac{f(4{,}01)-f(4)}{4{,}01-4}=\dfrac{71{,}481201-71}{0{,}01}=48{,}1201$

c) $\dfrac{f(4{,}001)-f(4)}{0{,}001}\approx\dfrac{71{,}048012-71}{0{,}001}=48{,}012$

$$v_4=\lim_4\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_4\frac{(x^3+7)-71}{x-4}=\lim_4\frac{x^3-64}{x-4}=$$
$$=\lim_4\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}=\lim_4(x^2+4x+16)=48$$

114. a) $\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=\dfrac{13-6}{1}=7$ b) $\dfrac{f(3{,}1)-f(3)}{3{,}1-3}=\dfrac{6{,}61-6}{0{,}1}=6{,}1$

c) $\dfrac{f(3{,}01)-f(3)}{3{,}01-3}=\dfrac{6{,}0601-6}{0{,}01}=6{,}01$

Az érintő iránytangense:

$$f'(3)=\lim_3\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_3\frac{(x^2-3)-6}{x-3}=\lim_3\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_3(x+3)=6$$

115. a) $d(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(3-2x)-3}{x}=-2,\quad x\in\mathbf{R}-\{0\}$

b) $d(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{\dfrac{1}{8x}-\dfrac{1}{16}}{x-2}=\dfrac{\dfrac{2-x}{16x}}{x-2}=-\dfrac{1}{16x},\quad x\in\mathbf{R}-\{0\ ;2\}$

116. a) $\lim\limits_2\dfrac{(x^2+5)-9}{x-2}=\lim\limits_2\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_2(x+2)=4=f'(2)$

b) $\lim\limits_{-3}\dfrac{(5x^2-4x)-57}{x+3}=\lim\limits_{-3}\dfrac{5\left(x-\dfrac{19}{5}\right)(x+3)}{x+3}=$

$=\lim\limits_{-3}(5x-19)=-34=f'(-3)$

c) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{1}(x^3+x^2+x+1) = 4 = f'(1)$

d) $\lim\limits_{\frac{1}{3}} \dfrac{\frac{1}{x}-3}{x-\frac{1}{3}} = \lim\limits_{\frac{1}{3}} \dfrac{\frac{1-3x}{x}}{\frac{3x-1}{3}} = \lim\limits_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1-3x}{x}\cdot\dfrac{3}{3x-1}\right) = \lim\limits_{\frac{1}{3}}\left(-\dfrac{3}{x}\right) = -9 = f'\left(\dfrac{1}{3}\right)$

e) $\lim\limits_{1} \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim\limits_{1} \dfrac{\frac{3-x-2}{2(x+2)}}{x-1} = \lim\limits_{1} \dfrac{1-x}{(x-1)\,2\,(x+2)} =$

$= \lim\limits_{1}\left[-\dfrac{1}{2(x+2)}\right] = -\dfrac{1}{6} = f'(1)$

f) $\lim\limits_{8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim\limits_{8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3} = \lim\limits_{8} \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+2^2} = \dfrac{1}{12} = f'(8)$

117. a) $f'(3) = \lim\limits_{3} \dfrac{(2x^2+4x-1)-29}{x-3} = \lim\limits_{3} \dfrac{2x^2+4x-30}{x-3} =$

$= \lim\limits_{3} \dfrac{2(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim\limits_{3} 2(x+5) = 16$

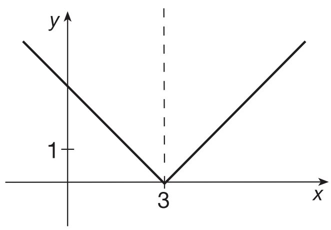
b) $f'(0) = \lim\limits_{0} \dfrac{(x^3+10)-10}{x-0} = \lim\limits_{0} x^2 = 0$

118. a) A függvény folytonos.

$f'_+(3) = \lim\limits_{3+0} \dfrac{(x-3)-0}{x-3} = \lim\limits_{3+0} 1 = 1$

$f'_-(3) = \lim\limits_{3-0} \dfrac{(3-x)-0}{x-3} = \lim\limits_{3-0}(-1) = -1$

$f'_+(3) \neq f'_-(3) \Rightarrow$ A függvény nem differenciálható az $x = 3$ pontban.

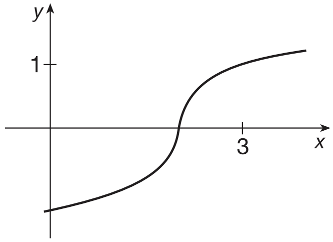


M 41. ábra

b) Mivel a függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen, ezért nem differenciálható ebben a pontban.

c) $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-0}{x-2} = \lim\limits_{2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \infty$

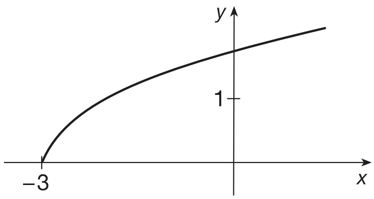
Tehát nincs határértéke a különbségihányados-függvénynek az $x=2$ helyen, vagyis a függvény nem differenciálható itt.



M 42. ábra

d) Mivel $D_f = [-3\ ;\ \infty[$, ezért az $x=-3$ helyen csak a jobb oldali differenciálhatóságot vizsgálhatjuk.

$\lim\limits_{-3+0} \dfrac{\sqrt{x+3}-0}{x+3} = \lim\limits_{-3+0} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} = \infty \;\Rightarrow$ A függvény nem differenciálható (jobbról) az $x=-3$ helyen.



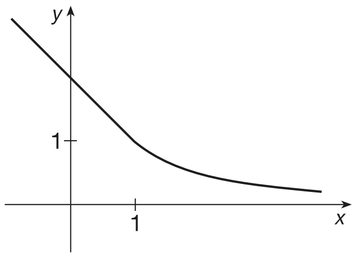
M 43. ábra

e) A függvény folytonos.

$$f'_+(1) = \lim_{1+0} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{1+0} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{1+0}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

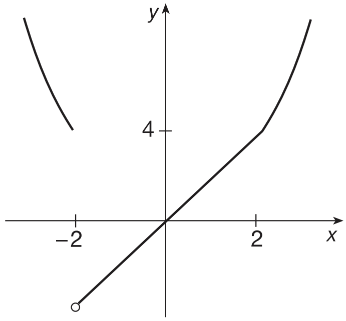
$$f'_-(1) = \lim_{1-0} \frac{(-x+2)-1}{x-1} = \lim_{1-0}(-1) = -1$$

$f'_+(1) = f'_-(1) \;\Rightarrow$ A függvény differenciálható az $x=1$ helyen.



M 44. ábra

f) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } -2 < x < 2 \\ x^2, & \text{ha } x \le -2 \vee x \ge 2 \end{cases}$



M 45. ábra

$x = -2$ -nél nem folytonos a függvény, ugyanis a jobb és bal oldali határérték nem egyezik meg: $\lim\limits_{-2+0} 2x = -4 \ne \lim\limits_{-2-0} x^2 = 4$, ezért nem is deriválható az $x = -2$ pontban.

$x = 2$ -nél folytonos és $f'_+(2) = \lim\limits_{2+0} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{2+0}(x+2) = 4$

$f'_-(2) = \lim\limits_{2-0} \dfrac{2x-4}{x-2} = \lim\limits_{2-0} 2 = 2$

$f'_+(2) \ne f'_-(2) \Rightarrow f$ nem differenciálható az $x = 2$ helyen.

119. Legyen x_0 tetszőleges eleme D_f -nek.

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x_0} \dfrac{(3x+2)-(3x_0+2)}{x-x_0} = \lim\limits_{x_0} \dfrac{3(x-x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x_0} 3 = 3$

$f'(x) = 3, \qquad x \in \mathbf{R}$.

b) $f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\dfrac{(6-2x^2)-(6-2x_0{}^2)}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{-2(x^2-x_0{}^2)}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x_0}\left[-2(x+x_0)\right]=-4x_0 \qquad f'(x)=-4x, \quad x\in\mathbf{R}$.

c) $f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\dfrac{3x^3-3x_0{}^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{3(x^3-x_0{}^3)}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}3(x^2+x_0x+x_0{}^2)=9x_0{}^2$

$f'(x)=9x^2, \qquad x\in\mathbf{R}$.

d) $f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+3\right)-\left(\dfrac{1}{x_0}+3\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{\dfrac{x_0-x}{x_0x}}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\left(-\dfrac{1}{x_0x}\right)=-\dfrac{1}{x_0{}^2}$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}, \quad x\in\mathbf{R}-\{0\}$.

e) $f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\dfrac{\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{4}{x_0{}^5}}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{4x_0{}^5-4x^5}{x^5\cdot x_0{}^5(x-x_0)}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{-4\cdot(x^5-x_0{}^5)}{x^5\cdot x_0{}^5\cdot(x-x_0)}=$

$=\lim\limits_{x_0}\dfrac{-4(x^4+x^3x_0+x^2x_0{}^2+xx_0{}^3+x_0{}^4)}{x^5x_0{}^5}=\dfrac{-4\cdot 5x_0{}^4}{x_0{}^{10}}=-\dfrac{20}{x_0{}^6}$

$f'(x)=-\dfrac{20}{x^6}, \qquad x\in\mathbf{R}-\{0\}$.

f)

$f'(x_0)=\lim\limits_{x_0}\dfrac{(1+\sqrt{x})-(1+\sqrt{x_0})}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x_0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x_0})^2}=$

$=\lim\limits_{x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, ha $x_0>0$. $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x\in\mathbf{R}^+$.

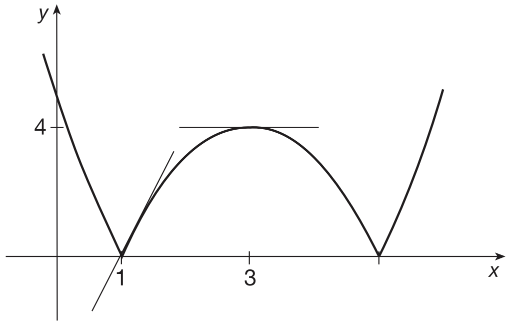
$D_f=\left[0\,;\,\infty\right[$, de a 0 helyen jobbról nem differenciálható a függvény,

ugyanis: $f'_+(0)=\lim\limits_{0+0}\dfrac{(1+\sqrt{x})-1}{x-0}=\lim\limits_{0+0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\infty$.

120. a) Az f függvény így is megadható:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+5, & \text{ha } x\le 1\\ -x^2+6x-5, & \text{ha } 1<x<5\\ x^2-6x+5, & \text{ha } x\ge 5\end{cases}$$

M. 46. ábra



M46. ábra

Először belátjuk, hogy a függvény differenciálható az $[1\,;\,3]$ intervallum egy tetszőleges belső x_0 pontjában.

$$\lim_{x_0}\frac{(-x^2+6x-5)-(-x_0{}^2+6x_0-5)}{x-x_0}=\lim_{x_0}\frac{x_0{}^2-x^2+6x-6x_0}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x_0}\frac{-(x-x_0)(x+x_0)+6(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x_0}\left[-(x+x_0)+6\right]=-2x_0+6$$

Az intervallum végpontjaiban csak egyoldali differenciálhányados létezése szükséges (lásd a TK. 126. oldalának definícióját).

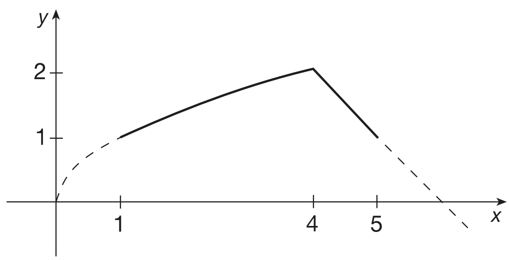
Mivel $x\mapsto -x^2+6x-5$ differenciálható 1-ben és 3-ban, ezért $f'_+(1)$ és $f'_-(3)$ létezik.

Tehát az f függvény differenciálható az $[1\,;\,3]$ intervallumon.

b) $f'_+(4)=\lim\limits_{4+0}\dfrac{(6-x)-2}{x-4}=\lim\limits_{4+0}\dfrac{4-x}{x-4}=-1$

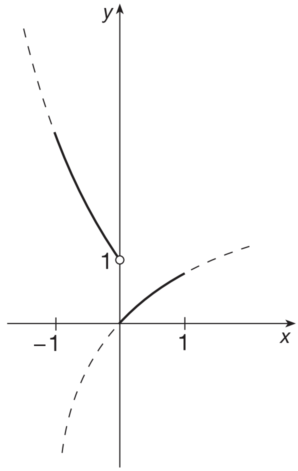
$f'_-(4)=\lim\limits_{4-0}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{4-0}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{4}$

$f'_+(4)\neq f'_-(4)\;\Rightarrow$ Nem deriválható az f függvény az $x=4$ pontban és így az $[1\,;\,5]$ intervallumon sem.



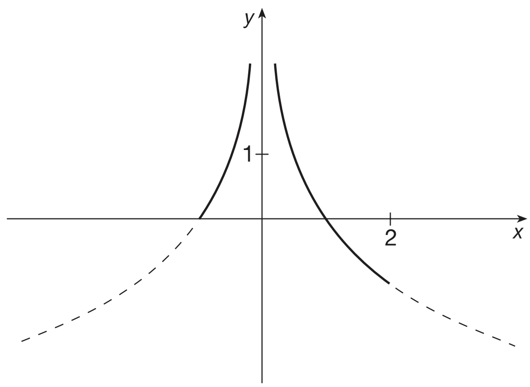
M 47. ábra

c) $\lim\limits_{0-0} e^{-x} = 1 \neq \lim\limits_{0+0} \ln(1+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ nem folytonos $\quad \Rightarrow \quad$ nem differenciálható az $x = 0$ helyen, így a $[-1\,;\,1]$ intervallumon sem.



M 48. ábra

d) f nem differenciálható a $[-1\,;\,2]$ intervallumon, mert az $x = 0$ helyen nincs értelmezve.



M 49. ábra

5.2 Differenciálási szabályok

A következő feladatoknál ahol nem említjük meg az értelmezési tartományt, ott a derivált-függvény értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értelmezési tartományával.

121. a) $f'(x) = 2 + 6x - 12x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(9x^7 - 3x^4) + 4x^{-5} - 3x^{-\frac{3}{4}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(63x^6 - 12x^3) - 20x^{-6} + \frac{9}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{4}} + x}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{4}{3}} - x + x}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}$

d) $f'(x) = -\dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} \cdot (x^6 + 2x) + \left(4 - 3\cdot\sqrt[5]{x}\right)\cdot(6x^5 + 2)\,, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^5 + 5x^{-4} + e^3}{100 + x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{4}}}$

$$f'(x) = \frac{(15x^4 - 20x^{-5})\cdot\left(100 + x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(100 + x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2} - \frac{(3x^5 + 5x^{-4} + e^3)\cdot\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)}{\left(100 + x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2}$$

f) $$f'(x) = \frac{\left[\left(15x^4 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(x^{10} + 2) + \left(3x^5 - x^{\frac{1}{3}}\right)10x^9\right]\cdot(4x^2 + 3)}{(4x^2 + 3)^2} - \frac{\left(3x^5 - \sqrt[3]{x}\right)(x^{10} + 2)\,8x}{(4x^2 + 3)^2}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}$$

122. a) $f(x) = \dfrac{1}{5}\cdot 6^x - \dfrac{1}{3}\cdot x^6$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{5}6^x \cdot \ln 6 - 2x^5$

b) $f'(x) = -\dfrac{21}{5}x^{-\frac{12}{5}} \cdot (4^x + \lg x) + 3x^{-\frac{7}{5}} \cdot \left(4^x \cdot \ln 4 + \dfrac{1}{x\ln 10}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln 0{,}1} \cdot (5e^x - \ln x) + (\log_{0,1} x + \sqrt{3}) \cdot \left(5e^x - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x\ln 3}-\frac{1}{4}x^{-\frac{7}{8}}\right)\cdot(2\cdot 7^x+5\cdot x^7)}{(2\cdot 7^x+5\cdot x^7)^2}-$$
$$-\frac{\left(\log_3 x-2\cdot\sqrt[8]{x}\right)(2\cdot 7^x\cdot\ln 7+35x^6)}{(2\cdot 7^x+5\cdot x^7)^2}$$

e) $$f'(x)=\frac{\left(\frac{10}{x}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)(4\cdot\lg x+3\cdot 10^x-e)}{(4\cdot\lg x+3\cdot 10^x-e)^2}-$$
$$-\frac{\left(10\cdot\ln x-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\frac{4}{x\ln 10}+3\cdot 10^x\cdot\ln 10\right)}{(4\cdot\lg x+3\cdot 10^x-e)^2}$$

f) $$f'(x)=\frac{\left[-2x^{-3}\left(x^{-\frac{1}{2}}-\ln x\right)+x^{-2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x\cdot\ln 2}\right]\cdot(3^x-7)}{(3^x-7)^2}-$$
$$-\frac{\left[x^{-2}\left(x^{-\frac{1}{2}}-\ln x\right)+4\cdot\log_2 x\right]\cdot 3^x\cdot\ln 3}{(3^x-7)^2}$$

123. a) $f'(x)=10(3x^4-2x)^9\cdot(12x^3-2)$

b) $f(x)=(2x-5)^{\frac{5}{7}}+4\qquad f'(x)=\frac{5}{7}(2x-5)^{-\frac{2}{7}}\cdot 2,\quad x\in\mathbf{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$

c) $f'(x)=3^{1-x}\cdot(\ln 3)(-1)+3(1-x)^2\cdot(-1)=-3^{1-x}\cdot(\ln 3)-3(1-x)^2$

d) $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3}{5x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{5(2x+3)-10x}{(2x+3)^2}=\frac{3}{2x(2x+3)\cdot\ln 10}$

f) $f'(x)=-x^{-5}\cdot\ln\ln\ln x+\frac{1}{4x^4}\cdot\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$

g) $f'(x)=\frac{5(2-x^2)^4\cdot(-2x)\cdot e^{-x}-(2-x^2)^5\cdot e^{-x}\cdot(-1)}{(e^{-x})^2}$

h) $f'(x)=3^{\sqrt[5]{\frac{2x-1}{x^2+2}}}\cdot(\ln 3)\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{2(x^2+2)-(2x-1)2x}{(x^2+2)^2}$,

$x\in\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

i) $$f'(x)=\frac{\left[e^{-x^3}(-3x^2)+2^{\sqrt{3x-1}}\cdot(\ln 2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x-1}}\cdot 3\right]\cdot\left[\sqrt{3}-(7x+4)^3\right]}{\left[\sqrt{3}-(7x+4)^3\right]^2}-$$

$$-\frac{\left(e^{-x^3}+2^{\sqrt{3x-1}}\right)\cdot(-3)(7x+4)^2\cdot 7}{\left[\sqrt{3}-(7x+4)^3\right]^2},\qquad \frac{1}{3}<x\neq\frac{1}{7}(6\sqrt{3}-4)$$

j) $$f'(x)=\frac{\frac{1}{(\log_3 x)\ln 10}\cdot\frac{1}{x\ln 3}\cdot 4^x\cdot\sqrt[5]{9-x^2}}{\left(4^x\cdot\sqrt[5]{9-x^2}\right)^2}-$$

$$-\frac{(\lg\log_3 x)\cdot\left[4^x\cdot(\ln 4)\cdot\sqrt[5]{9-x^2}+4^x\cdot\frac{1}{5}(9-x^2)^{-\frac{4}{5}}\cdot(-2x)\right]}{\left(4^x\cdot\sqrt[5]{9-x^2}\right)^2}$$

124. a) $f(x)=e^{\ln x^x}=e^{x\cdot\ln x}\qquad f'(x)=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

b) $(\lg x)^{\ln x}=(e^{\ln(\lg x)})^{\ln x}=e^{(\ln x)\cdot\ln(\lg x)}$

$$f'(x)=e^{(\ln x)\cdot\ln(\lg x)}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(\lg x)+(\ln x)\cdot\frac{1}{\lg x}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}\right]=$$

$$=(\lg x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(\lg x)+\frac{1}{x}\right]$$

125. a) $y=\frac{5}{4}x$ c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\ln 2$

b) $y=-240x+32$ d) $y=-3ex+4e$

126. a) $y=24x+31$ és $y=24x-33$

b) $f'(x)=6x^2\qquad f'(-2)=24\qquad P_0=(-2\ ;\ 24)$

$f''(x)=12x\qquad f''(-2)=-24=m$

Az érintő egyenlete: $y-24=-24(x+2)$, azaz $y=-24x-24$.

127. $y = -3x - 8$ és $y = -3x + 8$

128. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot x$

5.3 Magasabb rendű deriváltak

Ahol nem írjuk ki az értelmezési tartományt, ott a magasabb rendű derivált értelmezési tartománya megegyezik az eredeti f függvény értelmezési tartományával.

129. a) $f'''(x) = 840x^4 + 180x^2$ $\quad f^{(7)}(x) = 4 \cdot 7!$ $\quad f^{(8)}(x) = 0$

b) $f^{(3)}(x) = -2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12x^{-13}$

c) $f'''(x) = 4!(5x+7) \cdot 5^3$

d) $f^{(555)}(x) = e^x$

e) $f^{(n)}(x) = 6 \cdot 5^{2x} \cdot (\ln 5)^n \cdot 2^n$

f) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\,x^{-n}$

g) $f'''(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$

h) $f''(x) = -\frac{\ln x}{4\sqrt{x^3}}$

i) $f''(x) = \frac{1}{x^3}(2\ln x - 3)$ $\quad f'''(x) = \frac{1}{x^4}(11 - 6 \cdot \ln x)$

5.4* Trigonometrikus függvények deriválása

130. a) $f(x) = \frac{2}{3}(\sin x - \cos x) + 7 \cdot \mathrm{tg}x$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(\cos x + \sin x) + 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

b) $f'(x) = -\frac{5}{3} \cdot x^{-\frac{8}{3}}(\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x) + x^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right)$

c) $f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x)\cos x - (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

d) $$f'(x) = \frac{\left(e^x \cdot \mathrm{tg}x + \dfrac{e^x}{\cos^2 x} - \dfrac{5}{x}\right)(\pi + 3\sin x) - (e^x \cdot \mathrm{tg}x - 5\ln x)3\cos x}{(\pi + 3\sin x)^2}$$

131. a) $f'(x) = \left[\cos(7x^3 - 2x^2)\right] \cdot (21x^2 - 4x)$

b) $f'(x) = 7(\mathrm{tg}^6 x) \cdot (1 + \mathrm{tg}^2 x) - \left(1 + \mathrm{ctg}^2 \dfrac{2}{x^7}\right) \cdot (-14x^{-8})$

c) $$f'(x) = \frac{\dfrac{4}{\cos 3x}(-\sin 3x) \cdot 3(3^{-x} + \sin\cos x^2)}{(3^{-x} + \sin\cos x^2)^2} -$$
$$- \frac{(4 \cdot \ln\cos 3x) \cdot \left[-3^{-x} \cdot \ln 3 + (\cos\cos x^2)(-\sin x^2)2x\right]}{(3^{-x} + \sin\cos x^2)^2}$$

d) $$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left[(-\sin x) \cdot \ln\sin x + (\mathrm{ctg}\, x) \cdot \cos x\right] +$$
$$+ (\cos x)^{\sin x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln\cos x - (\mathrm{tg}\, x)\sin x\right]$$

132. $f'(x) = 2\cos x - 4(\cos x)\sin x = 2(\cos x)(1 - 2\sin x), \qquad x \in \left]0\ ;\ \pi\right[.$

$f'(x) = 0$, ha $\cos x = 0$, azaz ha $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, vagy

$\sin x = \dfrac{1}{2}$, azaz ha $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$, illetve $x_3 = \dfrac{5\pi}{6}$.

133. a) A függvény folytonos, de nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen.

b) A függvény az $x = 0$ helyen differenciálható; az $x = -1$ helyen nem folytonos $\Rightarrow$ nem differenciálható.

134. a) $D_{f'} = \mathbf{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$

b) $f(x) = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ \sin(-x) = -\sin x, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbf{R} - \{0\}$

135. a) $f^{(102)}(x) = -\sin x$ b) $f^{(120)}(x) = \dfrac{1}{3^{120}} \cos\dfrac{x}{3}$

5.5* Taylor-polinom, Taylor-sor

136. a) Az f függvény $x_0 = 3$-hoz tartozó harmadrendű Taylor-polinomját kell fölírni:

$f(x) = 152 + 138(x-3) + 41(x-3)^2 + 4(x-3)^3$

b) $f(x) = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^3 + 2(x+1)^4$

c) $f(x) = 2 + 19(x-1) + 32(x-1)^2 + 30(x-1)^3 + 15(x-1)^4 + 3(x-1)^5$

137. a) $2^x = 4 + \frac{4 \cdot \ln 2}{1!}(x-2) + \frac{4 \cdot (\ln 2)^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{4 \cdot (\ln 2)^3}{3!}(x-2)^3 + \ldots$

$+ \frac{4 \cdot (\ln 2)^n}{n!}(x-2)^n + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R})$

b) $\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \frac{1}{7!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7 - \ldots$

$(x \in \mathbf{R})$

138. a) $3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{(\ln 3)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln 3)^3}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(\ln 3)^n}{n!}x^n + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R})$

b) $3(e^x + e^{-x}) = 6 + 3x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^8}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R})$.

c) $\ln(1-x) = \ln[1 + (-x)] = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad (-1 \le x < 1)$

d) $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \qquad (-1 < x < 1)$

e) $\sin x^2 = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \ldots = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$

$(x \in \mathbf{R})$

139. a) Az $x \mapsto \ln(1+x)$ függvény MacLaurin-sorát alkalmazva:

$\ln(1+0{,}2) \approx 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{3} - \frac{0{,}2^4}{4} + \frac{0{,}2^5}{5} - \frac{0{,}2^6}{6} = 0{,}18232$

Használhatjuk a gyorsabban konvergáló

$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ MacLaurin-sort is, ha $x = \frac{1}{11}$.

Ekkor a fenti pontosság eléréséhez elegendő csupán a sor első két tagjának a kiszámítása:

$$\ln 1{,}2 = \ln \frac{1+\frac{1}{11}}{1-\frac{1}{11}} \approx \frac{2}{11} + \frac{2\cdot\frac{1}{11^3}}{3} \approx 0{,}18232$$

b) $$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \approx 2\cdot\left[\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7}\right] \approx 1{,}098$$

c) $\ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \approx 2{,}196$

140. Az $x \mapsto e^x$ függvény MacLaurin-sorát alkalmazva:
a) 5 tag figyelembevételével: 1,221403
b) 7 tag figyelembevételével: 0,7408181
c) 15 tag figyelembevételével: 7,389057

141. a) $$\sin 0{,}4 \approx 0{,}4 - \frac{(0{,}4)^3}{3!} + \frac{(0{,}4)^5}{5!} = 0{,}38942$$

b) $$\cos 0{,}1 \approx 1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}0001}{24} - \frac{0{,}000001}{720} = 0{,}99500$$

5.6 Vegyes feladatok

142. $$f'(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{2^x - x^2} \cdot \frac{(2^x \ln 2 - 2x)(3+\sqrt{x}) - (2^x - x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(3+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(1) = 2\cdot\ln 2 - 2 - \frac{1}{8}$$

143. A differenciálhatóság szükséges feltétele a folytonosság, azaz teljesülnie kell, hogy

$$\lim_{1+0} f(x) = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{1-0} f(x) = f(1) = a+b \quad \Rightarrow \quad a+b=1\,. \qquad (1)$$

Másrészt a jobb és bal oldali deriváltnak is egyenlőnek kell lennie:

$$f'_+(x) = -\frac{6}{(3x-1)^2} \qquad (x \ge 1) \;\Rightarrow\; f'_+(1) = -\frac{3}{2}$$

$$f'_-(x) = a \qquad (x \le 1) \;\Rightarrow\; f'_-(1) = a$$

Innen $a=-\frac{3}{2}$ adódik.

Az $a=-\frac{3}{2}$ értéket (1) -be helyettesítve kapjuk: $b=\frac{5}{2}$.

144. Az a) függvény folytonos, de nem differenciálható a vizsgált helyen.
A b) függvény differenciálható és $f'(5)=1$.

145. a) f nem folytonos függvény, mert az $x=1$ helyen nincs határértéke.
b) f nem differenciálható függvény, mert az $x=1$ helyen nem differenciálható.
c) $$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2}, & \text{ha} \quad -1\neq x<1 \\ 2(x-1), & \text{ha} \quad x>1 \end{cases}$$

146. a) $$f'(x)=\begin{cases} -x^5-1, & \text{ha} \quad x\le -1 \\ x^5+1, & \text{ha} \quad -1<x\le 0 \\ x^2+1, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases}$$
Az $x=-1$ helyen nem differenciálható; az $x=0$ helyen differenciálható a függvény.
b) Az érintő egyenlete: $y=-80x-129$.

147. a) Tengelypontok: $(6\ ;\ 0)$ és $(0\ ;\ 2)$. $f'(x)=\frac{3}{(x-3)^2}$

$f'(6)=f'(0)=\frac{1}{3}$.

b) $f''(x)=-\frac{6}{(x-3)^3}$ $\quad f''(4)=-6 \quad P_0=(4\ ;\ -6)$

$f^{(3)}(x)=\frac{18}{(x-3)^4}$ $\quad f^{(3)}(4)=18=m$

Az érintő egyenlete: $y+6=18(x-4)$, azaz $y=18x-78$.

5.7 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Nincs ilyen függvény, mert a differenciálhatóságnak szükséges feltétele a folytonosság. (Lásd TK. 5.2. tétel.)

b) Pl. $f(x)=\left|x-2\right|, \quad x_0=2$.

c) Pl. $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=0$.

A függvény grafikonjának érintője az $x_0=0$ pontban az y tengely, a függvény azonban nem deriválható ebben a pontban.

2. a) Hamis, mert hézagpontban nincs értelmezve a függvény.

b) Igaz, hiszen póluspontban nincs is értelmezve a függvény.

c) Hamis. Fordítva igaz: minden differenciálható függvény folytonos. (Lásd TK. 5.2. tétel.)

d) Igaz, mert a derivált az adott pontban az érintő iránytangensével egyenlő.

e) Hamis, a deriválhatósághoz ugyanis nem elég léteznie a jobb és bal oldali deriváltaknak, hanem egyenlőnek is kell lenniük.

f) Igaz.

3. Pl. $f(x)=x^n$, ha $x<0$, ahol $n\in\mathbf{N}^+-\{1\}$.

4. A szorzat deriválási szabálya szerint járunk el, az egyes tényezőket pedig a lánc-szabály alapján deriváljuk:

$$f'(x)=-\frac{2}{7}(4-x^5)^{-\frac{9}{7}}\cdot(-5x^4)\ln(x^2+3)+(4-x^5)^{-\frac{2}{7}}\cdot\frac{2x}{x^2+3}.$$

Tehát a B válasz a helyes.

5. $$f'(x)=\frac{-4x-12}{(x-3)^3}, \qquad f''(x)=\frac{8x+48}{(x-3)^4}$$

$f'(2)=20$, így az érintési pont: $P_0(2\ ;\ 20)$.

Az érintő meredeksége: $f''(2)=64=m$,

így az érintő egyenlete: $y=64x-108$.

Tehát az A válasz a helyes.

6. Írjuk fel a függvényt a következő alakban:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-x}, & \text{ha } x<0\\[2ex] \left(\dfrac{1}{10}\right)^{x}, & \text{ha } x\ge 0\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $x < 0$, illetve $x > 0$ esetén differenciálható a függvény. Az $x = 0$ helyen folytonos ugyan:

$$\lim_{0-0}\left(\frac{1}{10}\right)^{-x} = 1 = \lim_{0+0}\left(\frac{1}{10}\right)^{x} = f(0),$$

de a jobb és bal oldali deriváltak nem egyenlők:

$$f'_-(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^{-x} \cdot \ln\frac{1}{10}, \qquad f'_-(0) = -\ln\frac{1}{10}$$

$$f'_+(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^{x} \cdot \ln\frac{1}{10}, \qquad f'_+(0) = \ln\frac{1}{10}.$$

Így a függvény az $x = 0$ helyen nem deriválható.
Tehát a B válasz a helyes.

6. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK VIZSGÁLATA

6.1 Monotonitás, szélsőérték

148. a) $f'(x) = 6 - 6x^2$, $6 - 6x^2 = 0$, ha $x = \pm 1$.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f':	$-$	0	$+$	0	$-$
f:	$\searrow$	l. min $f(-1) = -4$	$\nearrow$	l. max $f(1) = 4$	$\searrow$

M2. táblázat

b) $f'(x) = 240x^4 - 60x^2 = 60x^2(4x^2 - 1)$, $f'(x) = 0$, ha $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
f':	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
f:	$\nearrow$	l. max. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$	$\searrow$	$f(0) = 0$	$\searrow$	l. min. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\nearrow$

M3. táblázat

Vegyük észre, hogy az $x = 0$ hely nem lokális szélsőértékhely, hiszen $f(0) = 0$, és a 0-nak van olyan bal oldali környezete, amelyben $f(x) > 0$, valamint a 0-nak van olyan jobb oldali környezete, amelyben $f(x) < 0$.

c) $f'(x) = \dfrac{1053 - 117x^2}{(9 + x^2)^2}$, $f'(x) = 0$, ha $x = \pm 3$.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f':	$-$	0	$+$	0	$-$
f:	$\searrow$	l. min. $f(-3) = -19{,}5$	$\nearrow$	l. max. $f(3) = 19{,}5$	$\searrow$

M4. táblázat

d) $f'(x) = 1 - \dfrac{9}{x^2}$, $f'(x) = 0$, ha $x = \pm 3$.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f':	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f:	$\nearrow$	l. max. $f(-3) = -6$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	l. min. $f(3) = 6$	$\nearrow$

M5. táblázat

e) $f'(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x < -4 \\ 2, & \text{ha } x > -4 \end{cases}$, $\quad f'(x) \neq 0$

	$x < -4$	$x = -4$	$x > -4$
f' :	$-$	$\times$	$+$
f :	$\searrow$ $f(x) > 0$	l. min. $f(-4) = 0$	$\nearrow$ $f(x) > 0$

M6. táblázat

f) $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\quad f'(x) = 0$, ha $x = -1$.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f' :	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
f :	$\nearrow$	l. max. $f(-1) = -e$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$

M7. táblázat

g) $f'(x) = e^{-x}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2}\right)$, $\quad 0 \neq x \in \mathbf{R}$, $\quad f'(x) = 0$, ha $x = \frac{2}{3}$.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
f' :	$-$	$\times$	$+$	0	$-$
f :	$\searrow$ $f(x) > 0$	$f(0) = 0$ l. min.	$\nearrow$ $f(x) > 0$	l. max. $f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3e}\right)^2}$	$\searrow$

M8. táblázat

h) $f'(x) = \frac{x-2}{x^2 - x}$, $\quad f'(x) = 0$, ha $x = 2$.

	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
f' :	$-$	0	$+$
f :	$\searrow$	l. min. $f(2) = \ln 4$	$\nearrow$

M9. táblázat

i) $f'(x) = -\frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$, $\quad f'(x) = 0$, ha $x = e^{-2}$.

	$0 < x < e^{-2}$	$x = e^{-2}$	$e^{-2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f':	$-$	0	$+$	$\times$	$-$
f:	$\searrow$	l. min. $f(e^{-2}) = \frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$

M10. táblázat

j) $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ $\qquad$ $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$

	$0 < x < e$	$x = e$	$x > e$
f':	$+$	0	$-$
f:	$\nearrow$	l. max. $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

M11. táblázat

149. $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
f':	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
f:	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	l. min. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$	$\nearrow$

M12. táblázat

A táblázat alapján az a) állítás igaz, a b) állítás hamis.

150*. $f'(x) = a \cdot \cos x + \cos 3x$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$.

$f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow$ A függvénynek $a = 2$ esetén lokális maximuma van az $x = \frac{\pi}{3}$ helyen.

151. a) $f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 2)^2}$

	$-1 \le x < 0$	$x = 0$	$0 < x \le 2$
f':	$-$	0	$+$
f:	$\searrow$	l. min. $f(0) = 1$	$\nearrow$

M13. táblázat

Lok. min. hely: $x = 0$; lok. min. érték: $f(0) = 1$.

Lok. max. helyek: $x = -1$ és $x = 2$; lok. max. értékek: $f(-1) = \frac{5}{3}$ és $f(2) = \frac{14}{6}$.

Absz. min. hely: $x = 0$; absz. min. érték: $f(0) = 1$.

Absz. max. hely: $x = 2$; absz. max. érték $f(2) = \frac{14}{6}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-5x - 10}{(x-2)^3}$

	$-5 \le x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x \le 5$
f':	$-$	0	$+$	$\times$	$-$
f:	$\searrow$	l. min. $f = (-2) = -\frac{5}{8}$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$

M14. táblázat

$$\lim_{2\pm 0} \frac{5x}{(x-2)^2} = \infty$$

Lok. min. helyek: $x = -2$ és $x = 5$; lok. min. értékek: $f(-2) = -\frac{5}{8}$ és $f(5) = \frac{25}{9}$.

Lok. max. hely: $x = -5$; lok. max. érték: $f(-5) = -\frac{25}{49}$.

Absz. min. hely: $x = -2$; absz. min. érték: $f(-2) = -\frac{5}{8}$.

Absz. max. hely: nincs.

c) $D_f = \mathbf{R}_0^+$

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right), \quad D_{f'} = \mathbf{R}^+$$

	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
f':	$+$	0	$-$
f:	$\nearrow$	l. max. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$

M15. táblázat

Lok. min. hely: $x = 0$; lok. min. érték: $f(0) = 0$.

Lok. max. hely: $x = \dfrac{1}{2}$; lok. max. érték: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

Absz. min. hely: $x = 0$; absz. min. érték: $f(0) = 0$ ($f(x) > 0$, ha $x > 0$).

Absz. max. hely: $x = \dfrac{1}{2}$; absz. max. érték $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

152. Jelölje m a függvény legkisebb, M pedig a függvény legnagyobb értékét.

a) $m = f(2) = -48$, $M = f(3) = 63$.

b) A) Nincs abszolút szélsőérték. B) $m = f(4) = 0$, $M = f(0) = 32$.

c) Nincs abszlút szélsőérték.

d) $m = f(0) = 0$, $M = f(-1) = f(1) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

e) $m = f(0) = f(4) = 0$, $M = f(2) = 2$.

f*) Nincs absz. minimum; $M = f(\pi) = \pi - 1$.

153. a) $R_f = \left]0 \ ; \ e^2\right]$

b) A) $R_f = \left[\dfrac{1}{3^9} \ ; \ \infty\right[$ B) $R_f = \left[\dfrac{1}{3^9} \ ; \ 1\right]$

c) A) $R_f = \mathbf{R} - \left]0 \ ; \ 20\right[$ B) $R_f = \mathbf{R} - \left]-16 \ ; \ 36\right[$

6.2 Konvex és konkáv függvények

154. a) $f'(x) = x^3 - x^2$ $f''(x) = 3x^2 - 2x$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$	$x>\frac{2}{3}$
f'':	+	0	−	0	+
f:		infl. pont.		infl. pont.	

M16. táblázat

b) $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f''(x) = 6x$

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
f'':	−	0	+
f:		infl. pont.	

M17. táblázat

c) $f'(x) = \dfrac{-2x-7}{(x-1)^4}$, $f''(x) = \dfrac{6x+30}{(x-1)^5}$

	$x<-5$	$x=-5$	$-5<x<1$	$x=1$	$x>1$
f'':	+	0	−	$\times$	+
f:	$\cup$	infl. pont.	$\cap$	$\times$	$\cup$

M18. táblázat

d) $f'(x)=\dfrac{3x^2+4}{(4-x^2)^3}$, $\qquad f''(x)=\dfrac{12x^3+48x}{(4-x^2)^4}$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
f'':	−	$\times$	−	0	+	$\times$	+
f:	$\cap$	$\times$	$\cap$	infl. pont.	$\cup$	$\times$	$\cup$

M19. táblázat

e) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$, $\qquad f''(x)=\dfrac{2}{\sqrt{(2+x^2)^3}}>0$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén,

vagyis f konvex; nincs inflexiós pontja.

f) $f'(x)=e^{-2x}(2x-2x^2)$, $\qquad f''(x)=e^{-2x}(4x^2-8x+2)$

	$x<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x>1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
f'':	+	0	−	0	+
f:	$\cup$	infl. pont	$\cap$	infl. pont.	$\cup$

M20. táblázat

g) $f'(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{(1+x)^2}$, $\qquad f''(x)=e^x\cdot\dfrac{1+x^2}{(1+x)^3}$

$f''(x)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ nincs inflexiós pont.

	$x<-1$	$x=-1$	$x>-1$
f'':	−	$\times$	+
f:	$\cap$	$\times$	$\cup$

M21. táblázat

h) $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$, $\qquad f''(x)=\dfrac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'':$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f:$	$\frown$	infl. pont	$\smile$	infl. pont	$\frown$

M22. táblázat

i) $f'(x)=-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}$, $\qquad f''(x)=\frac{1}{x^2\cdot\ln^2 x}\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)$

	$0<x<e^{-2}$	$x=e^{-2}$	$e^{-2}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'':$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$f:$	$\smile$	infl. pont	$\frown$	$\times$	$\smile$

M23. táblázat

j*) $f'(x)=1+\cos x$, $\qquad f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad$ ha $\; x=k\pi, \quad k\in\mathbf{Z}$

	$x=2k\pi$	$2k\pi<x<(2k+1)\pi$	$x=(2k+1)\pi$	$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$
$f'':$	0	$-$	0	$+$
$f:$	infl. pont	$\frown$	infl. pont	$\smile$

M24. táblázat

155. Az a) állítás igaz; a b) állítás hamis.

156. $f''(\pm\sigma)=0 \quad \Leftrightarrow \quad h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

Ekkor f'' előjelet vált az $x=\pm\sigma$ helyeken, tehát $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ esetén az $x=\pm\sigma$ helyek valóban inflexiós pontok.

6.3 Függvényvizsgálat

157. a) $D_f=\mathbf{R}$, zérushelyek: $x=0$, $x=\pm\sqrt{27}$.

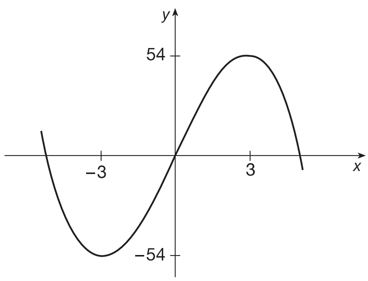
$f'(x)=27-3x^2$, $\qquad f''(x)=-6x$

<table>
<tr><td></td><td>$x<-3$</td><td>$x=-3$</td><td>$-3<x<0$</td><td>$x=0$</td><td>$0<x<3$</td><td>$x=3$</td><td>$x>3$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>$-$</td><td>0</td><td colspan="3">$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td colspan="3">$+$</td><td>0</td><td colspan="3">$-$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>$\searrow$</td><td>l. min.
$f(-3)=-54$</td><td colspan="3">$\nearrow$</td><td>l. max.
$f(3)=54$</td><td>$\searrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\cup$</td><td>infl. pont</td><td colspan="3">$\cap$</td></tr>
</table>

M25. táblázat

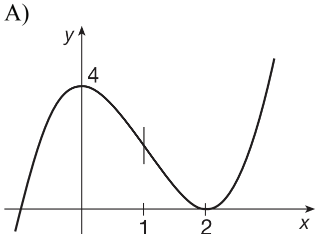
$\lim\limits_{\pm\infty}(27x-x^3)=\mp\infty$ $\quad R_f=\mathbf{R}$, páratlan függvény, mert

$f(-x)=-27x+x^3=-f(x)$ minden $x\in\mathbf{R}$ esetén; abszolút szélsőértékei nincsenek.



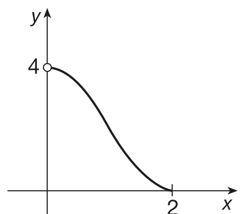
M 50. ábra

b) A)



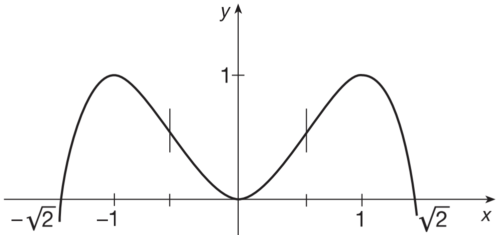
M51/a ábra

B)



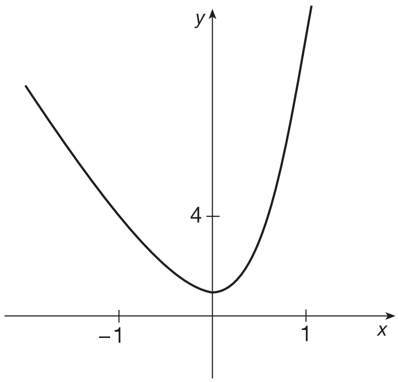
M 51/b ábra

c)



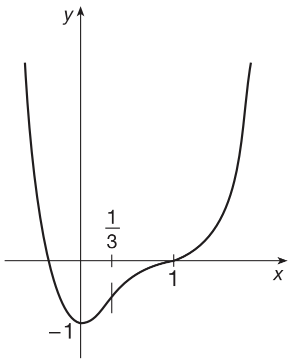
M 52. ábra

d)



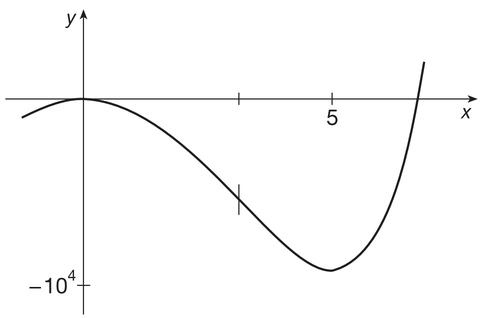
M 53. ábra

e)



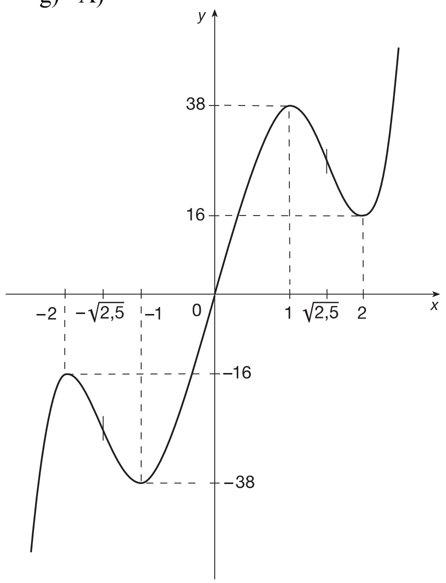
M 54. ábra

f)



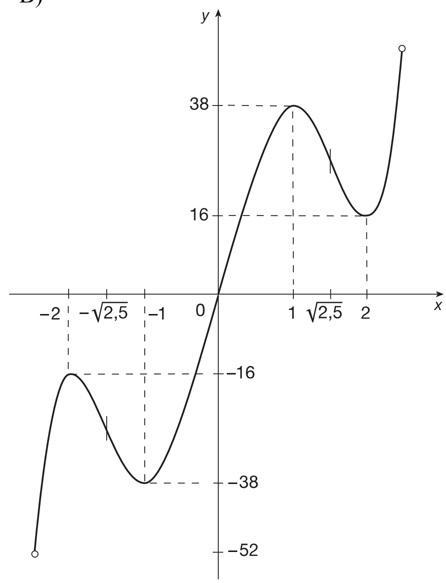
M 55. ábra

g) A)



M 56/a ábra

B)



M 56/b ábra

158. a) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, zérushely: $x = \dfrac{2}{3}$.

$f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$, $f''(x) = \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{12}{x^4}$

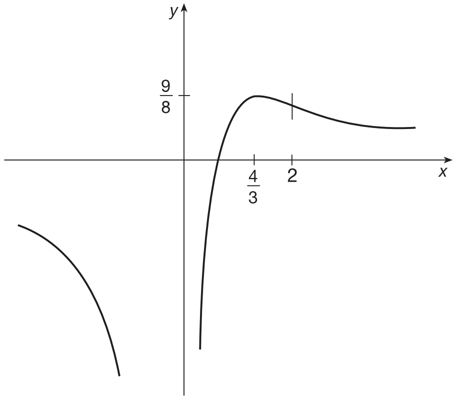
<table>
<tr><td></td><td>$x<0$</td><td>$x=0$</td><td>$0<x<\frac{4}{3}$</td><td>$x=\frac{4}{3}$</td><td>$\frac{4}{3}<x<2$</td><td>$x=2$</td><td>$x>2$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>–</td><td>×</td><td>+</td><td>0</td><td colspan="3">–</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>–</td><td>×</td><td colspan="3">–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>↘</td><td rowspan="2">×</td><td>↗</td><td>l. max.
$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{9}{8}$</td><td colspan="3">↘</td></tr>
<tr><td>$\frown$</td><td colspan="3">$\frown$</td><td>infl. pont</td><td>$\smile$</td></tr>
</table>

M26. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty}\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{0}\dfrac{3x-2}{x^2} = \dfrac{-2}{+0} = -\infty$,

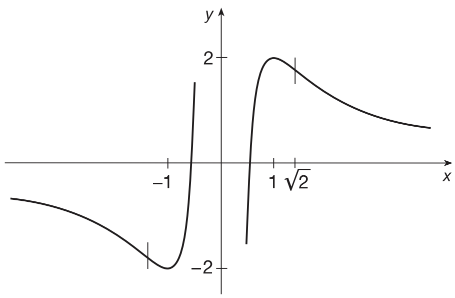
$R_f = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{9}{8}\right]$, absz. maximum: $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{9}{8}$; absz. minimum nincs.

Aszimptoták: $x = 0$ és $y = 0$ egyenletű egyenesek.



M 57. ábra

b)



M 58. ábra

c) $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$, zérushely: $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{-2x-2}{(x-1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{4x+8}{(x-1)^4}$

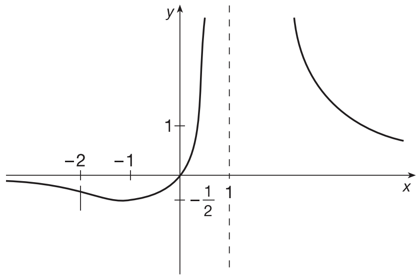
<table>
<tr><td></td><td>$x<-2$</td><td>$x=-2$</td><td>$-2<x<-1$</td><td>$x=-1$</td><td>$-1<x<1$</td><td>$x=1$</td><td>$x>1$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td colspan="3">–</td><td>0</td><td>+</td><td>×</td><td>–</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>–</td><td>0</td><td colspan="4">+</td><td>×</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td colspan="3">$\searrow$</td><td>l. min.
$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$</td><td>$\nearrow$</td><td rowspan="2">×</td><td>$\searrow$</td></tr>
<tr><td>$\frown$</td><td>infl. pont</td><td colspan="3">$\smile$</td><td>$\smile$</td></tr>
</table>

M27. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{2x}{(x-1)^2} = 0$, $\lim\limits_{1} \dfrac{2x}{(x-1)^2} = \infty$.

$R_f = \left[-\frac{1}{2} \;;\; \infty \right[$, absz. minimum: $f(-1) = -\frac{1}{2}$, absz. maximum nincs.

Aszimptoták: $x = 1$ és $y = 0$ egyenletű egyenesek.



M 59. ábra

d) $D_f = \mathbf{R} - \{-1 \;;\; 1\}$, zérushely nincs.

$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $\qquad f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$

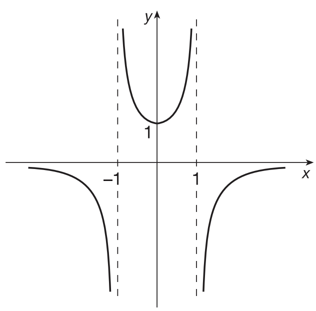
	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
f':	$-$	×	$-$	0	$+$	×	$+$
f'':	$-$	×	$+$			×	$-$
f:	$\searrow$	×	$\searrow$	l. min. $f(0)=1$	$\nearrow$	×	$\nearrow$
	$\frown$		$\smile$				$\frown$

M28. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$, $\qquad \lim\limits_{-1\pm 0} \frac{1}{1-x^2} = \pm\infty \qquad \lim\limits_{1\pm 0} \frac{1}{1-x^2} = \mp\infty$,

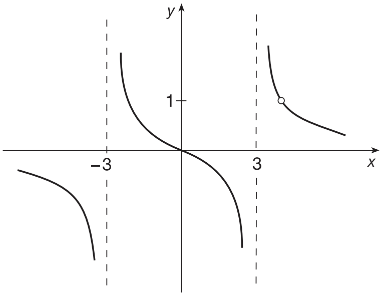
$R_f = \mathbf{R} - [0 \;;\; 1[$, páros függvény, mert $f(-x) = \frac{1}{1-(-x)^2} = f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén; absz. szélsőértékei nincsenek.

Aszimptoták: $x = -1$, $x = 1$ és $y = 0$ egyenletű egyenesek.



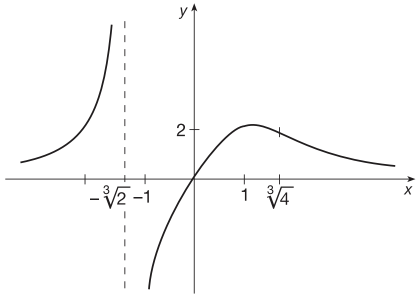
M 60. ábra

e)



M61. ábra

f)



M62. ábra

159. a) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, zérushely nincs.

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
f':	+	0	−	×	−	0	+
f'':	−			×	+		
f:	↗	l. max. $f(-2)=-4$	↘	×	↘	l. min. $f(-2)=4$	↗
	∩				∪		

M29. táblázat

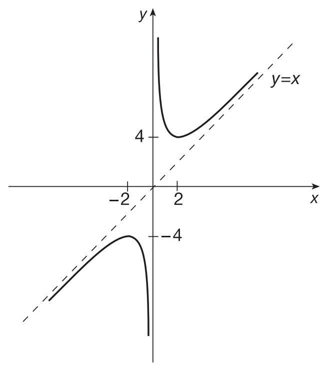
$\lim\limits_{\pm\infty}\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=\pm\infty$, $\quad \lim\limits_{0\pm0}\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=\pm\infty$,

aszimptoták: $y = x$ és $x = 0$ egyenletű egyenesek.

$R_f = \mathbf{R} -]-4\ ;\ 4[$, páratlan függvény, mert

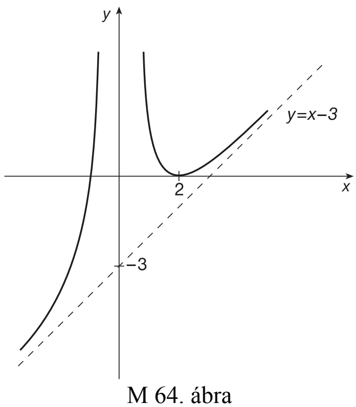
$f(-x) = -x + \dfrac{4}{-x} = -f(x)$ minden $x \neq 0$-ra;

abszolút szélsőértékei nincsenek.



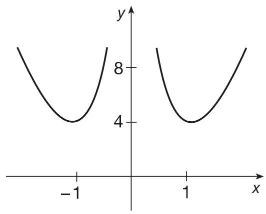
M 63. ábra

b)



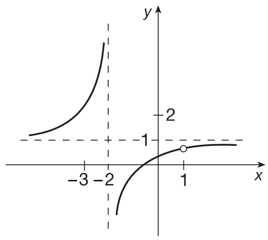
M 64. ábra

c)



M 65. ábra

d) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+1}{x+2}$, $\quad x\in\mathbf{R}-\{1\ ;\ -2\}$, hézagpont: $x=1$.



M 66. ábra

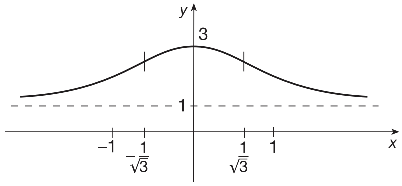
e) $D_f=\mathbf{R}$, zérushely nincs.

$f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$, $\qquad f''(x)=\dfrac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}$

<table>
<tr><td></td><td>$x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<0$</td><td>$x=0$</td><td>$0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td colspan="3">+</td><td>0</td><td colspan="3">−</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>+</td><td>0</td><td colspan="4">−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td colspan="3">↗</td><td>l. max.
$f(0)=3$</td><td colspan="3">↘</td></tr>
<tr><td>$\smile$</td><td>infl.
pont</td><td colspan="3">$\frown$</td><td>infl.
pont</td><td>$\smile$</td></tr>
</table>

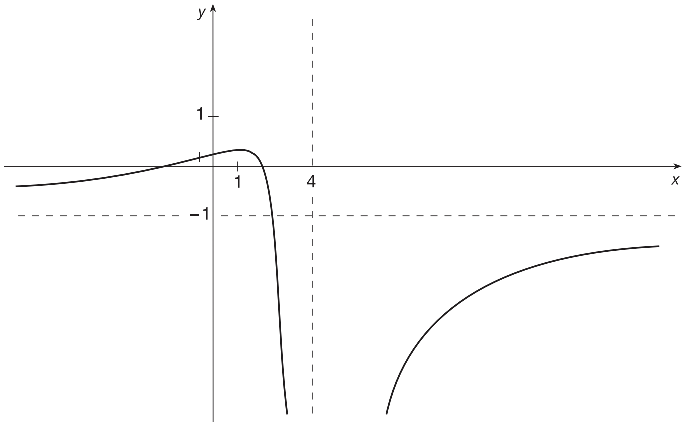
M30. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2+1}=1$, $\quad R_f=\left]1\ ;\ 3\right]$, páros függvény, mert $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2+1}=f(x)$ minden $x\in\mathbf{R}$-re; absz. maximuma: $f(0)=3$, absz. minimuma nincs, aszimptota: $y=1$ egyenletű egyenes.



M 67. ábra

f)



M 68. ábra

g) $D_f = \mathbf{R} - \{-1\ ;\ 1\}$, zérushely: $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

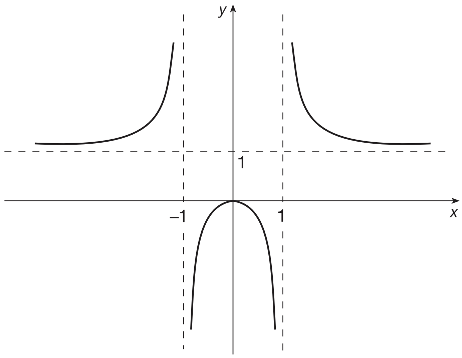
	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
f':	+	×	+	0	–	×	–
f'':	+	×	–			×	+
f:	↗	×	↗	l. max. $f(0)=0$	↘	×	↘
	∪		∩				∪

M31. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$, $\lim\limits_{-1\pm 0} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \mp\infty$ $\lim\limits_{1\pm 0} \dfrac{x^2}{x^2-1} = \pm\infty$,

$R_f = \mathbf{R} -]0\ ;\ 1]$, páros függvény, mert $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = f(x)$ minden $x \in D_f$

esetén; nincsenek absz. szélsőértékei,
aszimptoták: $x=-1$, $x=1$ és $y=1$ egyenletű egyenesek.



M 69. ábra

h) $f(x)=\dfrac{x(x+3)(x-2)}{x(x+2)}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$, $\quad D_f=\mathbf{R}-\{-2\ ;\ 0\}$.

Zérushelyek: $x=-3$ és $x=2$; hézagpont: $x=0$; póluspont $x=-2$.

Először az $x=0$-ban (az egyszerűsítéssel) folytonossá tett g függvényt vizsgáljuk:

$g(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$, $\; x\in\mathbf{R}-\{-2\}$

$g'(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2}$, $\qquad g''(x)=-\dfrac{8}{(x+2)^3}$

	$x<-2$	$x=-2$	$x>-2$
g':	+	×	+
g'':	+	×	−
g:	↗ ⌣	×	↗ ⌢

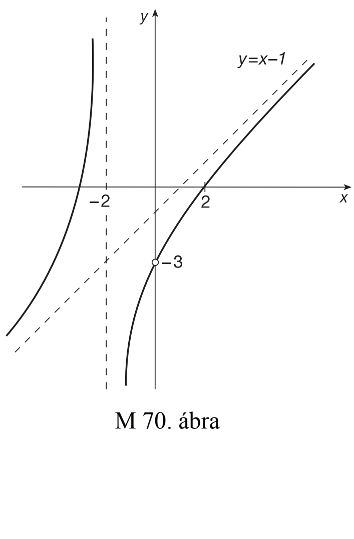
M32. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x+2}=\pm\infty$, $\qquad \lim\limits_{-2\pm\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x+2}=\mp\infty$,

$f(x)=x-1-\dfrac{4}{x+2}$ $\quad (x\neq 0)$, $\;$ aszimptoták:

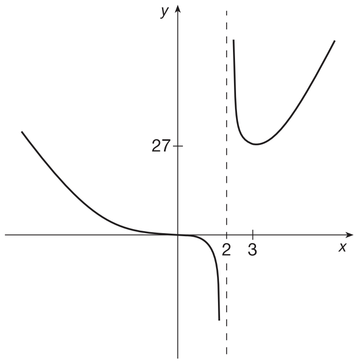
$y=x-1$ és $x=-2$ egyenletű egyenesek,

$R_f=\mathbf{R}$, nincsenek absz. szélsőértékek.



M 70. ábra

i)



M 71. ábra

j) $D_f = \mathbf{R} - \{-2\}$, zérushely: $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{x^3 + 6x^2}{(x+2)^3}, \qquad f''(x) = \frac{24x}{(x+2)^4}$$

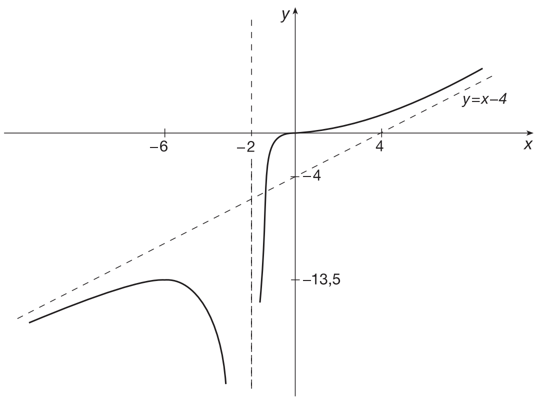
<table>
<tr><td></td><td>$x<-6$</td><td>$x=-6$</td><td>$-6<x<-2$</td><td>$x=-2$</td><td>$-2<x<0$</td><td>$x=0$</td><td>$x>0$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>×</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td colspan="3">−</td><td>×</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>↗</td><td>l. max.
$f(-6) = -13{,}5$</td><td>↘</td><td rowspan="2">×</td><td colspan="3">↗</td></tr>
<tr><td colspan="3">∩</td><td>∩</td><td>infl. pont</td><td>∪</td></tr>
</table>

M33. táblázat

$$\lim_{\pm\infty} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \pm\infty, \qquad \lim_{-2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = -\infty,$$

$f(x) = x - 4 + \dfrac{12x+16}{x^2+4x+4}$, aszimptoták: $y = x-4$ és $x=-2$ egyenletű egyenesek.

$R_f = \mathbf{R}$, nincsenek absz. szélsőértékek.



M 72. ábra

160. a) $D_f = \mathbf{R}^+$, zérushely nincs.

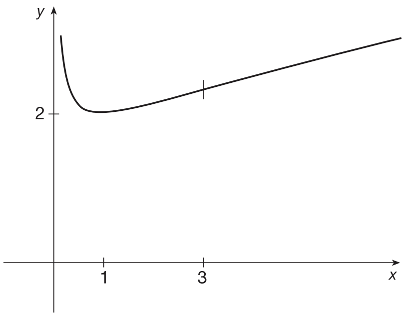
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$$

<table>
<tr><td></td><td>$0 < x < 1$</td><td>$x = 1$</td><td>$1 < x < 3$</td><td>$x = 3$</td><td>$x > 3$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>$-$</td><td>0</td><td colspan="3">$+$</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td colspan="3">$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>$\searrow$</td><td>l. min.
$f(1) = 2$</td><td colspan="3">$\nearrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\smile$</td><td>infl.
pont</td><td>$\frown$</td></tr>
</table>

M34. táblázat

$$\lim_{0+0}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \infty, \qquad \lim_{\infty}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \infty,$$

$R_f = [2\ ;\ \infty[$, absz. maximum nincs, absz. minimum: $f(1) = 2$.



M 73. ábra

b) $D_f =]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ \infty[$, zérushelyek: $x = \pm 1$.

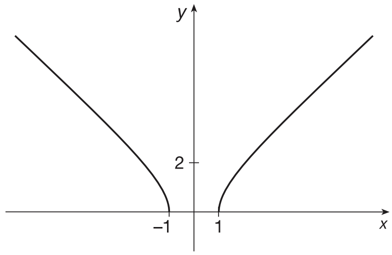
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad D_{f'} = D_{f''} = D_f - \{-1\ ;\ 1\}$$

<table>
<tr><td></td><td>$x < -1$</td><td>$-1 < x < 1$</td><td>$x > 1$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>$-$</td><td>$\times$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>$-$</td><td>$\times$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>$\searrow$</td><td rowspan="2">$\times$</td><td>$\nearrow$</td></tr>
<tr><td>$\frown$</td><td>$\frown$</td></tr>
</table>

M35. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \sqrt{x^2-1} = \infty$, $\quad \lim\limits_{-1-0} \sqrt{x^2-1} = 0$, $\quad \lim\limits_{1+0} \sqrt{x^2-1} = 0$,

$R_f = \mathbf{R}_0^+$, abszolút maximum nincs, absz. minimum: $f(-1) = f(1) = 0$, páros függvény.



M 74. ábra

c) $D_f = \left]-2\ ;\ 2\right[$, zérushely nincs.

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$, $\qquad f''(x) = \dfrac{2x^2+4}{\sqrt{(4-x^2)^5}}$,

	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$
f' :	$-$	0	$+$
f'' :	$+$		
f :	↘	l. min. $f(0) = \dfrac{1}{2}$	↗
	∪		

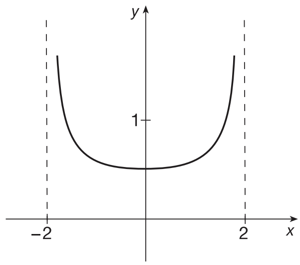
M36. táblázat

$\lim\limits_{-2+0} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$, $\qquad \lim\limits_{2-0} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$,

$R_f = \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ \infty\right[$, absz. maximum nincs, absz. minimum: $f(0) = \dfrac{1}{2}$,

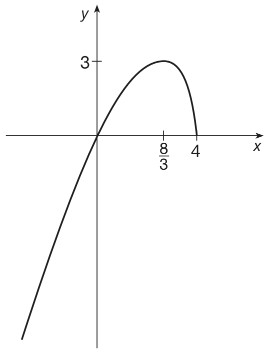
aszimptoták: $x = -2$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek, páros függvény, mert

$f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(-x)^2}} = f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén.



M 75. ábra

d)



M 76. ábra

e) $D_f = \mathbf{R}$, zérushely: $x = -1$.

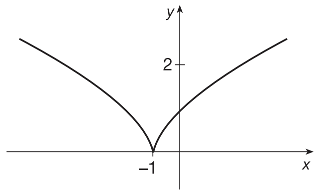
$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x+1}}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^4}}, \qquad D_{f'} = D_{f''} = D_f - \{-1\}.$$

	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
f':	$-$	$\times$	$+$
f'':	$-$	$\times$	$-$
f:	$\searrow$	l. min. $f(-1) = 0$	$\nearrow$
	$\frown$		$\frown$

M37. táblázat

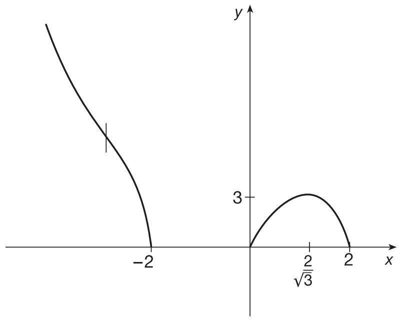
$\lim\limits_{\pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = \infty$, $\qquad R_f = \mathbf{R}_0^+$,

absz. maximum nincs, absz. minimum: $f(-1) = 0$.



M 77. ábra

f)



M 78. ábra

161. a) $D_f = \mathbf{R}$, zérushely nincs.

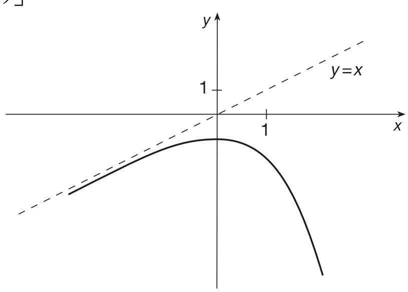
$f'(x) = 1 - e^x$, $f''(x) = -e^x$

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
f':	+	0	–
f'':	–		
f:	↗	l. max. $f(0) = -1$	↘
	$\frown$		

M38. táblázat

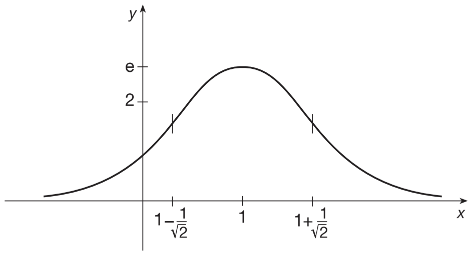
$$\lim_{-\infty}(x - e^x) = -\infty, \qquad \lim_{\infty}(x - e^x) = \lim_{\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x} - 1\right)\right] = -\infty,$$

$R_f = \left]-\infty\ ;\ -1\right]$, absz. minimum nincs,
absz. maximum: $f(0) = -1$.



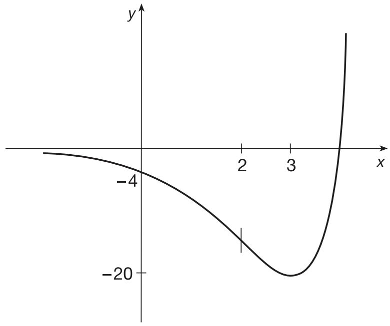
M79. ábra

b)



M 80. ábra

c)



M 81. ábra

d) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, zérushely nincs.

$$f'(x) = e^x \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right), \qquad f''(x) = e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

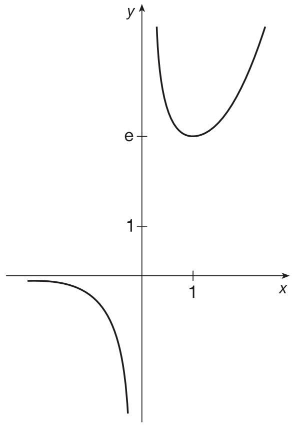
<table>
<tr><td></td><td>$x<0$</td><td>$x=0$</td><td>$0<x<1$</td><td>$x=1$</td><td>$x>1$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>$-$</td><td>×</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>$-$</td><td>×</td><td colspan="3">$+$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>↘</td><td rowspan="2">×</td><td>↘</td><td>l. min.
$f(1)=e$</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>⌒</td><td colspan="3">◡</td></tr>
</table>

M39. táblázat

$$\lim_{-\infty}\left(\frac{1}{x}e^x\right) = 0, \qquad \lim_{\infty}\frac{e^x}{x} = \infty, \qquad \lim_{0-0}\left(\frac{1}{x}e^x\right) = -\infty, \qquad \lim_{0+0}\left(\frac{1}{x}e^x\right) = \infty,$$

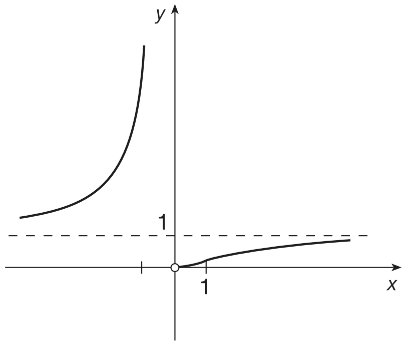
$R_f = \mathbf{R} - [0\ ;\ e[$, absz. szélsőértékei nincsenek;

aszimptoták: $x = 0$ és $y = 0$ egyenletű egyenesek.



M 82. ábra

e)



M 83. ábra

f) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, zérushely nincs.

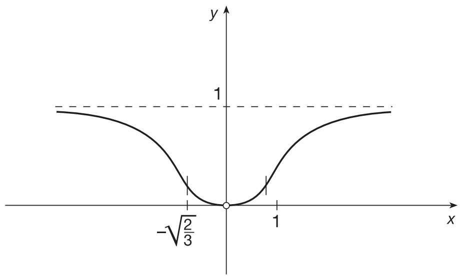
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}, \qquad f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^4}\left(\frac{2}{x^2} - 3\right)$$

<table>
<tr><td></td><td>$x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$</td><td>$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$</td><td>$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0$</td><td>$x = 0$</td><td>$0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$</td><td>$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$</td><td>$x > \sqrt{\frac{2}{3}}$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td colspan="3">–</td><td>$\times$</td><td colspan="3">+</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>$\times$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td colspan="3">$\searrow$</td><td rowspan="2">$\times$</td><td colspan="3">$\nearrow$</td></tr>
<tr><td>$\frown$</td><td>infl. pont</td><td>$\smile$</td><td>$\smile$</td><td>infl. pont</td><td>$\frown$</td></tr>
</table>

M40.táblázat

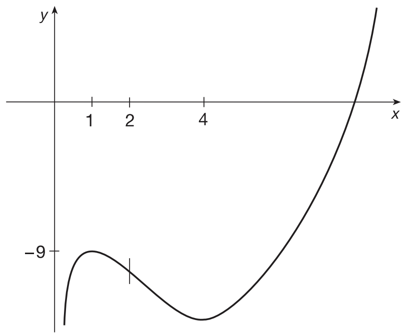
$\lim\limits_{\pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1, \qquad \lim\limits_{0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$

$R_f =]0\ ;\ 1[$, aszimptota: $y = 1$ egyenletű egyenes, nincsenek abszolút szélsőértékek, páros függvény, mert $f(-x) = e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = f(x)$ minden $x \neq 0$-ra.



M 84. ábra

162. a)



M 85. ábra

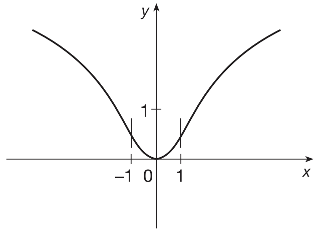
b) $D_f = \mathbf{R}$, zérushely: $x = 0$

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \qquad f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
f':	–			0	+		
f'':	–	0	+			0	–
f:	$\searrow$			l. min. $f(0)=0$	$\nearrow$		
	$\frown$	infl. pont	$\smile$			infl. pont	$\frown$

M41. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \ln(1+x^2) = \infty$, $\quad R_f = \mathbf{R}_0^+$, $\quad$ páros függvény, mert $\; f(-x) = \ln(1+(-x)^2) = f(x)$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén; $\quad$ absz. minimum: $\; f(0) = 0$, absz. maximum nincs.



M 86. ábra

c) $D_f = \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left]1\,;\,\infty\right[$, $\quad$ zérushelyek: $\; x = \pm\sqrt{2}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \qquad f''(x) = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

	$x < -1$	$-1 \le x \le 1$	$x > 1$
f':	$-$	$\times$	$+$
f'':	$-$	$\times$	$-$
f:	$\searrow$ $\frown$	$\times$	$\nearrow$ $\frown$

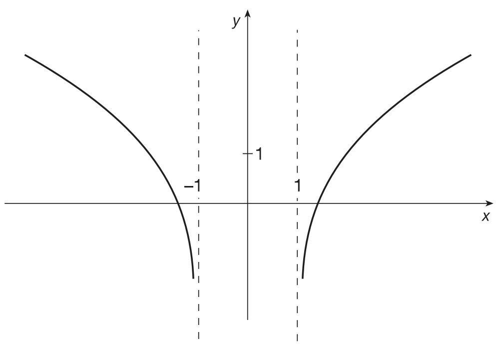
M42. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \ln(x^2-1) = \infty$, $\qquad \lim\limits_{-1-0} \ln(x^2-1) = -\infty$, $\qquad \lim\limits_{1+0} \ln(x^2-1) = -\infty$,

$R_f = \mathbf{R}$, $\quad$ nincsenek absz. szélőértékek, páros függvény, mert

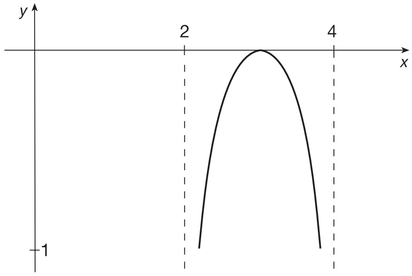
$f(-x) = \ln\left[(-x)^2 - 1\right] = f(x)$ $\;$ minden $\; x \in D_f \;$ esetén;

aszimptoták: $\; x = -1 \;$ és $\; x = 1 \;$ egyenletű egyenesek.



M 87. ábra

d)



M 88. ábra

e) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, zérushelyek: $x = \pm 1$.

$f'(x) = \dfrac{4 \cdot \ln x^2}{x}$, $\qquad f''(x) = \dfrac{8 - 4\ln x^2}{x^2}$

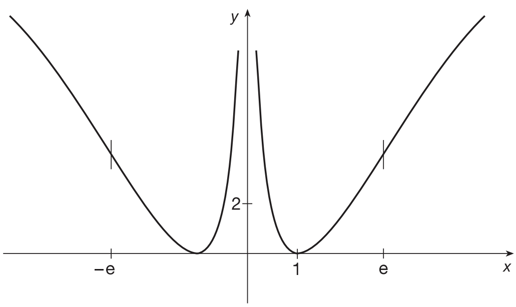
	$x<-e$	$x=-e$	$-e<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x<e$	$x=e$	$x>e$
f':	$-$			0	$+$	×	$-$	0	$+$		
f'':	$-$	0	$+$			×	$+$			0	$-$
f:	↘			l. min. $f(-1)=0$	↗	×	↘	l. min. $f(1)=0$	↗		
	∩	infl. pont	∪				∪			infl. pont	∩

M43. táblázat

$\lim\limits_{\pm\infty} \ln^2(x^2) = \infty$, $\qquad \lim\limits_{0} \ln^2(x^2) = \infty$,

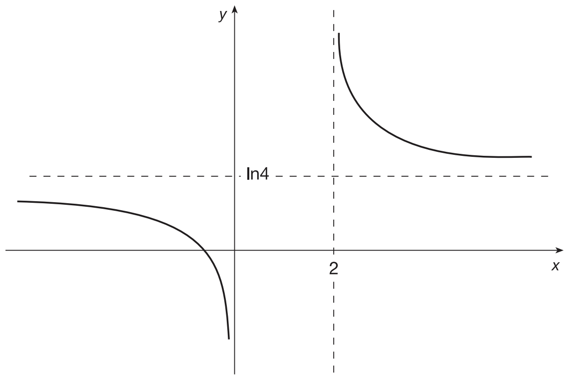
$R_f = [0\ ;\ \infty[$, páros függvény, absz. maximuma nincs,

absz. minimuma: $f(-1) = f(1) = 0$, aszimptota: $x = 0$ egyenletű egyenes.



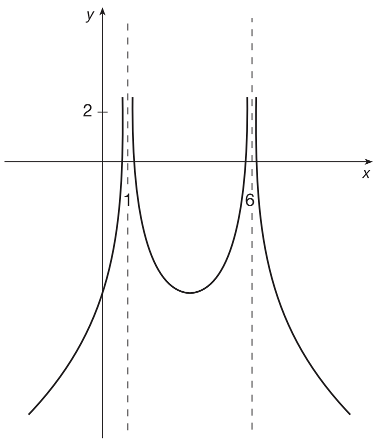
M 89. ábra

f)



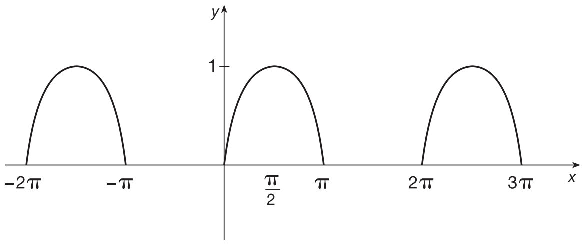
M 90. ábra

g)



M 91. ábra

163.* a)



M 92. ábra

b) $D_f = R - \left\{ (4k-1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$, zérushelyek: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

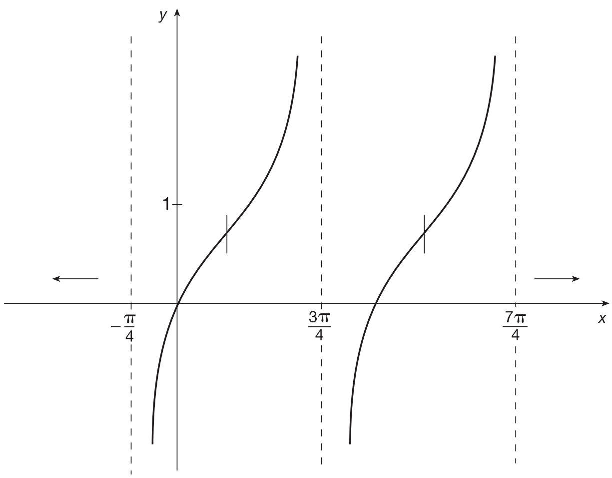
$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{1+\sin 2x} \neq 0, \qquad D_{f'} = D_f$$

$$f''(x) = -\frac{2\sqrt{2}\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}, \qquad D_{f''} = D_f$$

$$f''(x) = 0 \iff \cos 2x = 0 \text{ és } x \in D_f \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

<table>
<tr><th></th><th>$x=-\frac{\pi}{4}$</th><th>$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$</th><th>$x=\frac{\pi}{4}$</th><th>$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$</th><th>$x=\frac{3\pi}{4}$</th></tr>
<tr><td>f':</td><td>×</td><td colspan="3">+</td><td>×</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td>×</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>×</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td rowspan="2">×</td><td colspan="3">↗</td><td rowspan="2">×</td></tr>
<tr><td>⌒</td><td>infl. pont</td><td>◡</td></tr>
</table>

M44. táblázat



M 93. ábra

$$\lim_{-\frac{\pi}{4}+0} \frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{+0} = -\infty, \qquad \lim_{\frac{3\pi}{4}-0} \frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{+0} = \infty,$$

$R_f = \mathbf{R}$, periodikus függvény (periódusa: π), absz. szélsőértékei nincsenek,

aszimptoták: $x = (4k-1)\frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$, egyenletű egyenesek.

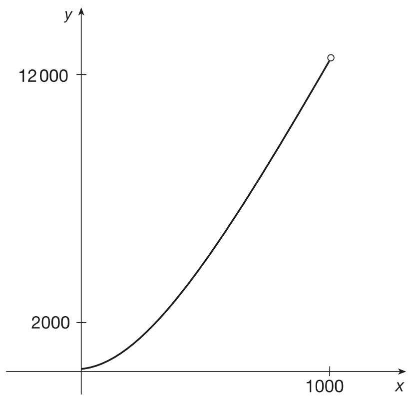
6.4 Gazdasági alkalmazások

164. a) $C'(x) = \frac{3}{5}\sqrt{x} \geq 0$ minden $x \in [0\ ;\ 1000]$ esetén $\Rightarrow$ C monoton növekedő függvény.

$C''(x) = \frac{3}{10\sqrt{x}} > 0$ minden $x \in]0\ ;\ 1000]$ esetén $\Rightarrow$ C konvex függvény.

Abszolút minimuma: $C(0) = 2$, abszolút maximum nincs.

$R_f = \left[2\ ;\ 4000\sqrt{10}+2\right[$



M 94. ábra

b) A határköltség: $C'(100) = \frac{3}{5}\sqrt{100} = 6$, ami azt mutatja meg, hogy ha 100 db helyett 101 db terméket állítanak elő, akkor közelítőleg 6 euróval nő a költség.

c) A) $\frac{C(121)-C(100)}{C(100)} \cdot 100 \approx 32{,}94\ (\%)$, $\frac{121-100}{100} \cdot 100 = 21\ (\%)$, $\frac{32{,}94}{21} \approx 1{,}57$

Tehát: ha 1% -kal több terméket állítanak elő, akkor átlagosan $1{,}57\%$ -kal nő a költség.

B) $\frac{C(110)-C(100)}{C(100)} \cdot 100 = 15{,}29\ (\%)$, $\frac{110-100}{100} \cdot 100 = 10\ (\%)$, $\frac{15{,}29}{10} = 1{,}529$

Az elaszticitás:

$E_C(100) = C'(100) \cdot \dfrac{100}{C(100)} \approx 1{,}493\ (\%)$, ami azt mutatja meg, hogy ha 100 db helyett 1%-kal több terméket állítanak elő, akkor közelítőleg $1{,}493\%$-kal nő a költség.

165. a) A határkereslet: $D'(9) = -\dfrac{300}{\sqrt{9^5}} \approx -1{,}235$

b) $E_D(p) = D'(p) \cdot \dfrac{p}{D(p)} = -300 \cdot p^{-\frac{5}{2}} \cdot \dfrac{p}{200 \cdot p^{-\frac{3}{2}}} = -300 \cdot \dfrac{p^{-\frac{3}{2}}}{200p^{-\frac{3}{2}}} = -\dfrac{3}{2}$;

az elaszticitás független p-től, ezért

$E_D(9) = -1{,}5\ (\%)$

Tehát: ha a termék árát 9-ről 1%-kal növeljük, akkor közelítőleg $1{,}5\%$-kal csökken a kereslet.

A pontos számítás:

$\dfrac{D(9{,}09) - D(9)}{D(9)} \cdot 100 \approx \dfrac{7{,}2977 - 7{,}407}{7{,}407} \cdot 100 \approx -1{,}48\%$.

166. Az f függvény elaszticitásfüggvénye:

$E_f(x) = f'(x) \cdot \dfrac{x}{f(x)} \qquad f(x) \neq 0$.

a) $E_f(x) = -50x^9 \dfrac{x}{-5x^{10}} = 10, \quad D_E = D_f - \{0\}, \quad E_f(4) = 10$

b) $E_f(x) = -\dfrac{6}{x^4} \cdot \dfrac{x}{\frac{2}{x^3}} = -3, \quad E_f(4) = -3$

c) $E_f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}, \quad D_E = D_f - \{0\}, \quad E_f(4) = \dfrac{1}{2}$.

d) $E_f(x) = b_0 b_1 x^{b_1 - 1} \cdot \dfrac{x}{b_0 x^{b_1}} = b_1, \quad D_E = D_f - \{0\}, \quad E_f(4) = b_1$

167. a) $E_f(x) = \dfrac{2x}{2x+5}, \quad D_E = D_f - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}, \quad E_f(10) = 0{,}8$

b) $E_f(x) = -10x(4-x^2)^4 \cdot \dfrac{x}{(4-x^2)^5} = -\dfrac{10x^2}{4-x^2}, \quad D_E = D_f - \{\pm 2\}, \quad E_f(10) \approx 10{,}4$

c) $E_f(x) = \dfrac{20}{(80-2x)^3} \cdot \dfrac{x}{5} \cdot (80-2x)^2 = \dfrac{4x}{80-2x}, \quad E_f(10) = 0{,}667$

d) $E_f(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{3x-12}} \cdot \dfrac{x}{-\sqrt{3x-12}} = \dfrac{3x}{2(3x-12)}, \quad D_E = D_f - \{4\}, \quad E_f(10) \approx 0{,}83$

e) $E_f(x) = -\dfrac{1}{4} e^{10-\frac{x}{4}} \cdot \dfrac{x}{e^{10-\frac{x}{4}}} = -\dfrac{x}{4}, \quad E_f(10) = -2{,}5$

f) $E_f(x) = \dfrac{510}{(102-x)^2} \cdot \dfrac{x}{\frac{5x}{102-x}} = \dfrac{102}{102-x}, \quad D_E = D_f - \{0\}, \quad E_f(10) \approx 1{,}1$

168. A téglalap oldalainak hosszát jelölje x és y.
Ekkor a kerület: $K = 2x + y$.

A téglalap területe: $5000 = xy$, innen $y = \dfrac{5000}{x}$.

Így feladatunk a

$$K(x) = 2x + \frac{5000}{x}, \quad x > 0$$

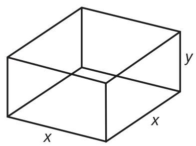
függvény abszolút minimumhelyének a meghatározása.

$$K'(x) = 2 - \frac{5000}{x^2} = 0 \iff x = 50 \quad (-50 \notin D_K).$$

$$K''(x) = \frac{10000}{x^3}$$

$K''(50) > 0 \Rightarrow$ a K függvénynek lokális és egyben abszolút minimumhelye: $x = 50$.
Tehát a téglalap oldalainak hossza: 50 m és 100 m.

169.



M 95. ábra

Az M95. ábra jelöléseivel a hasáb felszíne: $F = x^2 + 4xy$.

A hasáb térfogata: $x^2 y = 32$, ahonnan $y = \dfrac{32}{x^2}$.

Az

$$F(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}, \quad 0 < x$$

függvény abszolút minimumhelyét keressük.

$$F'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \iff \text{ha } x = 4.$$

$F''(x) = 2 + \dfrac{256}{x^3}$ $\quad F''(4) > 0 \Rightarrow$ Az F függvénynek az $x = 4$ helyen lokális és egyben abszolút minimuma van.
Tehát a medence hossza és szélessége 4 m, a mélysége 2 m.

170. Az

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2$$

függvény abszolút minimumhelyét kell meghatározni.

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + ... + 2(x - x_n) = 2nx - 2x_1 - 2x_2 - ... - 2x_n = 0 \iff \text{ha}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

$f''(x) = 2n$ $\quad f''\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) > 0 \Rightarrow$ Az f függvénynek az $x = \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$ helyen lokális és egyben abszolút minimuma van.

171. Jelölje x a zuhanykarok számát. Ekkor az

$$f(x) = 3x + \frac{400}{x} \cdot 15, \quad 0 < x < 400$$

függvény abszolút minimumhelyét keressük.

$$f'(x) = 3 - \frac{6000}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{2000} \approx 45 \quad (-\sqrt{2000} \notin D_f)$$

$f''(x) = \dfrac{12\,000}{x^3}$, $\quad f''(\sqrt{2000}) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *f*-nek lokális és egyben abszolút minimuma van az $x = \sqrt{2000}$ helyen.

Tehát 45 zuhanykar elhelyezése gazdaságos.

172. $Q = 1000$ (egység)

173. a) 178,66 kg/ha b) 100 kg/ha

174. Jelöljük x-szel a hajóút hosszát. A hajóút $\dfrac{x}{v}$ napig tart, tehát a hajózás költségét a sebesség függvényében a következő függvény adja meg:

$$C(v) = \frac{x}{v}a + \frac{x}{v}kv^3 = \frac{x}{v}a + kxv^2 \quad (k > 0 \text{ állandó})$$

E függvény a minimumát a $v = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$ helyen veszi fel.

175. a) A határkereslet: $D'(p) = -3$, $\quad D'(6) = -3$

Az árbevétel függvény: $R(p) = p \cdot D(p) = -3p^2 + 42p$

Határbevétel: $R'(p) = -6p + 42$, $\quad R'(6) = 6$

b) Az R függvény maximuma $p = 7$ Ft-nál van, a maximum értéke: $R(7) = 147$ Ft, ekkor a kereslet: $D(7) = 21$ kg.

c) Kereslet árelaszticitás függvény:

$$E_D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = -\frac{3p}{-3p + 42}, \quad E_D(6) = -0{,}75$$

Tehát: ha az egységárat 6 Ft-ról 1%-kal növeljük, akkor a kereslet közelítőleg 0,75%-kal csökken.

176. a) Az árbevételfüggvény:

$R(x) = x \cdot f(x)$, azaz $R(x) = x \cdot e^{10 - \frac{x}{4}}$, $\quad x > 0$.

E függvény abszolút maximuma az $x = 4$ (egységnél) van.

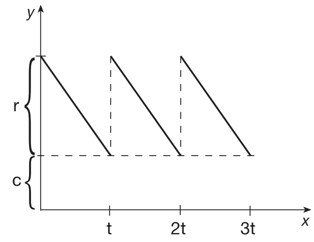
b) $$E_f(x) = e^{10 - \frac{x}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{x}{e^{10 - \frac{x}{4}}} = -\frac{x}{4}, \quad E_f(10) = -2{,}5$$

Tehát: ha a termék árát 10-ről 1%-kal megemeljük, akkor közelítőleg 2,5%-kal csökken a kereslet.

177. a) $x \approx 316{,}2$ (egység) b) $x = 200$ (egység)

178. $x = 10\,000$ (egység)

179.▲ Tekintsük az M96. ábrát!



M 96. ábra

Az átlagos raktárkészlet: $c + \frac{r}{2}$.

Ha egy periódus t napból áll, akkor az egy periódusra jutó költséget az alábbi függvény adja meg:

$$k : t \mapsto 100 + \left(c + \frac{r}{2}\right) 0{,}1 \cdot t$$

Egy év alatt a készletezések száma: $\frac{300}{t}$. Mivel $\frac{300}{t} = \frac{1500}{r}$, innen $t = \frac{r}{5}$.

Tehát az egy évre jutó költséget a következő függvény adja meg:

$$K : r \mapsto \left[100 + \left(c + \frac{r}{2}\right) \cdot 0{,}1 \cdot \frac{r}{5}\right] \frac{1500}{r} = \frac{150000}{r} + 30c + 15r.$$

E költségfüggvénynek minimuma van, ha $r = 100$ db, a raktárat 20 naponként kell feltölteni.

180. $x = 100$ (egység)

181. a) A profit 3000 db termék esetén maximális.

Ekkor a havi bevétel: $R(3) = \frac{1}{2}$ millió Ft.

b) Elaszticitással közelítve:

$$E_R(2) = \frac{4}{3}.$$

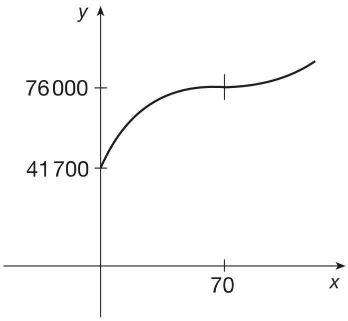
Tehát: ha a termelt mennyiséget 2000 darabról 1%-kal növeljük, akkor a bevétel kb. 1,33%-kal növekszik.

6.5 Vegyes feladatok

182. Az a) állítás hamis ($x = 0$ inflexiós pont); a b) állítás igaz.

183. Mindkét állítás hamis.

184. a)



M 97. ábra

b) $C'(x) = 0{,}3x^2 - 42x + 1470, \quad x \geq 0$.
$C'(20) = 750$, $\quad C'(60) = 30$.

c) $E_C(20) \approx 0{,}236$, $\quad E_c(60) \approx 0{,}015$.

185. a) Az árbevétel függvény: $R(p) = p \cdot e^{-0{,}02p+8}$

E függvény maximuma a $p = 50$ (egység)-nél van. $D(50) = e^7$ (egység)

b) $E_D(p) = -0{,}02 \cdot e^{-0{,}02p+8} \cdot \dfrac{p}{e^{-0{,}02p+8}} = -0{,}02p$, $E_D(40) = -0{,}8$

Tehát: ha az árat 40 egységről 1%-kal növeljük, akkor a kereslet körülbelül 0,8%-kal csökken.

186. a) Jelöljük R-rel az árbevételfüggvényt az eladott mennyiség függvényében:
$R(x) = \pi(x) + C(x) = -2x^2 + 160x - 147$, $\quad x \geq 0$.
E függvény az $x = 40$ helyen veszi fel a maximumát.

b) Határköltség: $C'(x) = 40 \quad C'(20) = 40$
Határbevétel: $R'(x) = -4x + 160$, $\quad R'(20) = 80$
Határprofit: $\pi'(x) = -4x + 120$, $\quad \pi'(20) = 40$

6.6 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Nem igaz. Pl. az $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ függvénynek lokális maximuma van az $x = -3$ helyen, abszolút maximuma viszont nincs (a függvény felülről nem korlátos).

b) Igaz, mert az abszolút maximumhely egyben lokális maximumhely is.

c) Nem igaz. Pl. az $f(x) = x^3$ függvénynek az $x = 0$ helyen nincs lokális szélsőértéke, de az érintője itt az x tengely.

d) Nem igaz; ugyanis nem biztos, hogy f differenciálható az x_0 pontban. (Gondoljunk pl. az $f(x) = |x|$ függvényre az $x = 0$ helyen.)

e) Nem igaz. Pl. az $f(x) = x^4$ függvénynek az $x = 0$ helyen lokális minimuma van, de $f'(0) = f''(0) = 0$.

f) Nem igaz, ugyanis $f'(x)=0$ is lehetséges. Pl. az $f(x)=x^3$ függvény szigorúan monoton növekedő és $f'(0)=0$.
g) Igaz. (Lásd TK. 6.3. tétel b) részét.)
h) Nem igaz. Pl. az $f(x)=x^4$ függvény esetén $f''(0)=0$, az $x=0$ hely mégsem inflexiós pontja a függvénynek.
i) Igaz. (Lásd TK. 6.9. tétel b) részét.)
j) Igaz; ugyanis ha x_0 póluspont, akkor definíció szerint $\lim\limits_{x_0}|f(x)|=\infty$, ami azt jelenti, hogy az $x=x_0$ egyenletű egyenes az f függvény grafikonjának függőleges aszimptotája. (TK. 170. old.)

2. $D_f=\left[-\frac{7}{2};\infty\right[$, $\quad f'(x)=\frac{3x+6}{\sqrt{2x+7}}$, $\quad \lim\limits_{\infty} f(x)=\infty$.

	$-\frac{7}{2}<x<-2$	$x=-2$	$x>-2$
f':	$-$	0	$+$
f:	$\searrow$	l. min. $f(-2)=-3\sqrt{3}$	$\nearrow$

M45. táblázat

A fentiek figyelembe vételével adódik, hogy a B válasz a helyes.

3. $f'(x)=\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}$, $\quad f''(x)=\frac{54x}{(x-3)^4}$

$f'(0)=0$, $\quad f''(0)=0$.

	$x<0$	$x=0$	$0<x<3$
f':	$+$	0	$+$
f'':	$-$	0	$+$
f:	$\nearrow$ $\frown$	infl. pont	$\nearrow$ $\smile$

M46. táblázat

A táblázatból leolvasható, hogy a C válasz a helyes.

4. $f'(x)=\dfrac{6x^2-6}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=12\cdot\dfrac{3x-x^3}{(x^2+1)^3}$

	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f'':	+	0	–	0	+	0	–
f	$\smile$	infl. pont	$\frown$	infl. pont	$\smile$	infl. pont	$\frown$

M47. táblázat

A táblázat alapján az A válasz a helyes.

5. $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^2}(1-\ln x)$

<table>
<tr><td></td><td>$0<x<1$</td><td>$x=1$</td><td>$1<x<e$</td><td>$x=e$</td><td>$x>e$</td></tr>
<tr><td>f':</td><td>–</td><td>0</td><td colspan="3">+</td></tr>
<tr><td>f'':</td><td colspan="3">+</td><td>0</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="2">f:</td><td>$\searrow$</td><td>l. min. $f(1)=0$</td><td colspan="3">$\nearrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\smile$</td><td>infl. pont</td><td>$\frown$</td></tr>
</table>

M48. táblázat

A táblázat alapján igaz: a b) c) és e) állítás, illetve hamis: az a) és d) állítás.

6. Árbevétel: $F(x)=x\cdot f(x)=500+x\cdot e^{-\left(\frac{x}{50}-1\right)}$

$$F'(x)=e^{-\left(\frac{x}{50}-1\right)}\cdot\left(1-\frac{x}{50}\right),\qquad F'(x)=0,\ \text{ha}\ \ x=50\,.$$

$F'>0$, ha $20<x<50$ és $F'<0$, ha $50<x<110$,
így $x=50$ lokális és abszolút maximumhely.
A maximális árbevétel: $F(50)=550$ (ezer Ft), ezért az A válasz a helyes.

7. Az elaszticitásfüggvény:

$$E_f(x)=-\frac{12x}{2-3x},\quad \text{így}\quad E_f(5)=\frac{60}{13}\approx 4{,}6\,.$$

Az elaszticitás definíciója szerint a C válasz a helyes.

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.1 Primitív függvény, határozatlan integrál

187. a) $\int 7\,dx = 7x + C$

b) $\int 6x^5\,dx = x^6 + C$

c) $\int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C$

d) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad x \neq 0$

e) $\int x^{\frac{3}{20}}dx = \frac{20}{23}x^{\frac{23}{20}} + C$

f) $\int \frac{1}{x+7}dx = \ln|x+7| + C$

g) $\int 8^x \cdot \ln 8 \cdot dx = 8^x + C$

h) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

188. a) Van. A primitív függvények az alábbi formában adhatók meg:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + C, & \text{ha } x \le 0 \\ x^4 + C, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Hangsúlyozzuk, hogy C bármilyen valós számot jelenthet, de a $]-\infty\,; 0]$ és $]0\,;\,\infty[$ intervallumokban e konstansok értéke egyenlő kell hogy legyen, különben nem lenne folytonos az F függvény az $x = 0$ helyen.

b) Nincs. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha létezne primitív függvény, akkor az csak ilyen alakú lehetne:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + C_1\,, & \text{ha } x \le 0 \\ e^x + C_2\,, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

hiszen $(x^2 + C_1)' = 2x$ és $(e^x + C_2)' = e^x$.

Azonban nincsenek olyan C_1, C_2 konstansok, amelyek esetén F differenciálható lenne az $x = 0$ helyen, mert F folytonossága miatt $C_1 = 1 + C_2$ lenne, de $F'_+(0) = 1 \neq F'_-(0) = 0$.

189. Azt kell megvizsgálni, hogy az F függvény differenciálható függvény-e.

a) F differenciálható függvény (az $x = 2$ helyen is) $\Rightarrow$ lehet primitív függvény.

b) F nem differenciálható az $x = 1$ helyen ($x = -1$-nél differenciálható) $\Rightarrow$ nem lehet primitív függvény.

c) A függvény nyilvánvalóan differenciálható az $]1\ ;\ 2[$ és $]2\ ;\ \infty[$ intervallumokban, de a csatlakozási pontban – az $x=2$ helyen – nem differenciálható; ugyanis

$$F'_-(2)=\frac{1}{2\ln 2}\neq F'_+(2)=-3\,.$$

Tehát F nem lehet primitív függvény.

d) F nem differenciálható (nem is folytonos) az $x=1$ helyen $\Rightarrow$ nem lehet primitív függvény.

7.2 Alapintegrálok. Egyszerű integrálási módszerek

190. a) $\int(10+2x^5)\,dx=\int 10dx+2\int x^5dx=10x+2\cdot\frac{x^6}{6}+C$

b) $2\int x^7dx-3\int x^6dx+4\int x^3dx=2\frac{x^8}{8}-3\frac{x^7}{7}+4\frac{x^4}{4}+C=$

$=\frac{x^8}{4}-3\frac{x^7}{7}+x^4+C$

c) $\int 1dx-7\int x^6dx+9\int x^{-4}dx-3\int x^{-\frac{2}{5}}dx=x-7\frac{x^7}{7}+9\frac{x^{-3}}{-3}-3\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+C=$

$=x-x^7-3x^{-3}-5x^{\frac{3}{5}}+C$

d) $\int x^{-7}dx-2\int x^{-4}dx+3\int\frac{1}{x}dx-3\int e^xdx=\frac{x^{-6}}{-6}-2\frac{x^{-3}}{-3}+3\ln|x|-3e^x+C$

e) A számlálót tagonként elosztjuk a nevezővel, majd tagonként integrálunk.

$\int\left(\sqrt{3}\cdot x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+8x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\sqrt{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+8\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$

$=2\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

f) x^3-nal egyszerűsítünk, elvégezzük a négyzetre emelést, majd a számlálót tagonként elosztjuk a nevezővel és tagonként integrálunk:

$\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^3}\right)dx=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{8x^2}+C$

g) $\int(x^4+4^x+e^2)\,dx=\frac{x^5}{5}+\frac{4^x}{\ln 4}+e^2x+C$

h) $\int \frac{3^{-x}+x^2}{x^2\cdot 3^{-x}}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+3^x\right)dx = -\frac{1}{x}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$

191. a) $F(x)=2\frac{x^3}{3}+x+C$, $F(0)=C=2$, tehát $F(x)=\frac{2x^3}{3}+x+2$.

Hasonlóan az a) ponthoz adódik:

b) $F(x)=\frac{5x^2}{2}+2$

c) $F(x)=\frac{3^x}{\ln 3}+2-\frac{1}{\ln 3}$

d) $F(x)=\frac{(x+2)^4}{4}-2$

e) $F(x)=\ln|x-e|+1$, ha $x<e$

f) $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{4}{3}$

192. a) $\int (8x+5)^{10}dx=\frac{(8x+5)^{11}}{8\cdot 11}+C=\frac{(8x+5)^{11}}{88}+C$

b) $\int\left(1+\frac{x}{2}\right)^{99}dx=\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{100}}{\frac{1}{2}\cdot 100}+C=\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{100}}{50}+C$

c) $\int (2-5x)^{-4}dx=\frac{(2-5x)^{-3}}{(-5)(-3)}+C=\frac{(2-5x)^{-3}}{15}+C$

d) $\int (6-7x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(6-7x)^{\frac{3}{2}}}{-7\cdot\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{21}\cdot(6-7x)^{\frac{3}{2}}+C$

e) $\int (4x+1)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{8}(4x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

f) $3\int (2x-1)^{-\frac{2}{5}}dx=3\frac{(2x-1)^{\frac{3}{5}}}{2\cdot\frac{3}{5}}+C=\frac{5}{2}(2x-1)^{\frac{3}{5}}+C$

g) $\int e^{-2x+3}dx=\frac{e^{-2x+3}}{-2}+C$

h) $\int 10^{3x}dx=\frac{10^{3x}}{3\cdot\ln 10}+C$

i) $\int \frac{1}{3-4x}dx = \frac{\ln|3-4x|}{-4} + C$

j) $\int \frac{2x}{2x-1}dx = \int \frac{(2x-1)+1}{2x-1}dx = \int \left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = x + \frac{\ln|2x-1|}{2} + C$

193. a) $\int (8x^2+5)^{10}\, x\, dx = \frac{1}{16}\int (8x^2+5)^{10}\cdot 16x\, dx = \frac{1}{16}\cdot\frac{(8x^2+5)^{11}}{11} + C$

b) $\frac{1}{6}\int (2x^3+3x^2+6x)^3\cdot(6x^2+6x+6)\, dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3+3x^2+6x)^4}{4} + C$

c) $\int (5-2x)(5x-x^2)^{-4}\, dx = \frac{(5x-x^2)^{-3}}{-3} + C$

d) $\frac{1}{5}\int 5x^4(3+x^5)^{\frac{5}{6}}\, dx = \frac{1}{5}\frac{(3+x^5)^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{55}(3+x^5)^{\frac{11}{6}} + C$

e) $\int (e^x+1)(e^x+x)^{-\frac{3}{5}}\, dx = \frac{5}{2}(e^x+x)^{\frac{2}{5}} + C$

f) $-\frac{1}{\ln 3}\int -3^x(\ln 3)(8-3^x)^{-\frac{1}{3}}\, dx = -\frac{3}{2\ln 3}(8-3^x)^{\frac{2}{3}} + C$

g) $\int \frac{1}{x}(\ln x)^3\, dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C$

h) $(\ln 2)\int \frac{1}{x\ln 2}(\sqrt{2}+\log_2 x)\, dx = (\ln 2)\frac{(\sqrt{2}+\log_2 x)^2}{2} + C$

194. a) $\int \frac{6}{7+6x}dx = \ln|7+6x| + C$

b) $\int \frac{16x}{8x^2+5}dx = \ln|8x^2+5| + C = \ln(8x^2+5) + C$

c) $\int \frac{x-3}{x(x-6)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-6x| + C$

d) $\int \frac{x-9x^5}{2+x^2-3x^6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-18x^5}{2+x^2-3x^6}dx = \frac{1}{2}\ln|2+x^2-3x^6| + C$

e) $\int \frac{7^x}{3-7^x}dx = -\frac{1}{\ln 7}\int \frac{-7^x\ln 7}{3-7^x}dx = -\frac{1}{\ln 7}\ln|3-7^x| + C$

f) $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}-3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}-3}{e^{3x}-3x}dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-3x| + C$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\sqrt{2}+\log_2 x)}dx = (\ln 2)\int \frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\sqrt{2}+\log_2 x}dx = (\ln 2)\ln\left|\sqrt{2}+\log_2 x\right| + C$

h▲) $\displaystyle\int \frac{\log_x 5}{x}dx = \int \frac{\frac{\ln 5}{\ln x}}{x}dx = \int \frac{\ln 5}{x\ln x}dx = (\ln 5)\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = (\ln 5)\ln\left|\ln x\right| + C$

195. a) $\displaystyle\int e^{x^3}\cdot 3x^2 dx = e^{x^3} + C$

b) $\displaystyle\int 4^{x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot 4^{x^2}dx = \frac{4^{x^2}}{2\ln 4} + C$

c) $\displaystyle\int (2x-3)5^{x^2-3x}dx = \frac{5^{x^2-3x}}{\ln 5} + C$

d) $\displaystyle\frac{1}{2}\int (16x^4+6x+2)e^{4x^4+3x^2+2x}dx = \frac{1}{2}e^{4x^4+3x^2+2x} + C$

e) $\displaystyle\frac{1}{\ln 7}\int 7^x(\ln 7)(7^x+3)^{\frac{1}{6}}dx = \frac{6}{7\ln 7}(7^x+3)^{\frac{7}{6}} + C$

f) $\displaystyle\int \frac{3^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int -\frac{2}{x^3}3^{\frac{1}{x^2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{3^{\frac{1}{x^2}}}{\ln 3} + C$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^{-2}dx = -(\ln x)^{-1} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$

h) $\displaystyle(\ln 3)\int \frac{1}{x\ln 3}(\log_3 x-5)^3 dx = (\ln 3)\frac{(\log_3 x-5)^4}{4} + C$

7.3 Integrálás helyettesítéssel

196. a) $\displaystyle\int e^{x^3}3x^2dx = \left|\begin{array}{c} t = x^3 \\ \dfrac{dt}{dx} = 3x^2 \\ dt = 3x^2dx \end{array}\right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^3} + C$

b) $\displaystyle\int 4^{x^2}\cdot x\,dx = \left|\begin{array}{c} t = x^2 \\ \dfrac{dt}{dx} = 2x \\ \dfrac{dt}{2} = x\,dx \end{array}\right| = \int 4^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{4^t}{\ln 4} + C = \frac{4^{x^2}}{2\ln 4} + C$

c) $$\int (2x-3)5^{x^2-3x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2-3x \\ \dfrac{dt}{dx} = 2x-3 \\ dt = (2x-3)\,dx \end{array} \right| = \int 5^t\,dt = \frac{5^t}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2-3x}}{\ln 5} + C$$

d) $$\int (8x^3+3x+1)\,e^{4x^4+3x^2+2x}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^4+3x^2+2x \\ \dfrac{dt}{dx} = 16x^3+6x+2 \\ \dfrac{dt}{2} = (8x^3+6x+2)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int e^t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{4x^4+3x^2+2x} + C$$

e) $$\int 7^x \cdot (7^x+3)^{\frac{1}{6}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 7^x+3 \\ \dfrac{dt}{dx} = 7^x \ln 7 \\ \dfrac{dt}{\ln 7} = 7^x\,dx \end{array} \right| = \int t^{\frac{1}{6}}\,\frac{dt}{\ln 7} = \frac{1}{\ln 7}\cdot\frac{6}{7}\cdot t^{\frac{7}{6}} + C =$$

$$= \frac{6}{7\ln 7}(7^x+3)^{\frac{7}{6}} + C$$

f) $$\int \frac{3^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{2}{x^3} \\ \dfrac{dt}{-2} = \dfrac{dx}{x^3} \end{array} \right| = \int 3^t\,\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2\ln 3}3^t + C = -\frac{3^{\frac{1}{x^2}}}{2\ln 3} + C$$

g) $$\int \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

h) $$\int \frac{(\log_3 x-5)^3}{x}dx = \left| \begin{array}{l} t=\log_3 x-5 \\ \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x\ln 3} \\ dt(\ln 3)=\dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \int t^3(\ln 3)\,dt = (\ln 3)\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=(\ln 3)\frac{(\log_3 x-5)^4}{4}+C$$

197. a) $$\int \frac{6x-1}{\sqrt[3]{4-3x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=4-3x \\ x=\dfrac{4-t}{3} \\ \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{3} \\ dx=-\dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{7-2t}{\sqrt[3]{t}}\cdot\frac{-dt}{3} = \frac{1}{3}\int\left(2\cdot t^{\frac{2}{3}}-7\cdot t^{-\frac{1}{3}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}t^{\frac{5}{3}}-\frac{21}{2}t^{\frac{2}{3}}\right)+C=\frac{2}{5}(4-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{7}{2}(4-3x)^{\frac{2}{3}}+C$$

b) $$\int \frac{3x}{\sqrt{(5x+2)^3}}dx = \left| \begin{array}{l} t=5x+2 \\ x=\dfrac{t-2}{5} \\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{5} \\ dx=\dfrac{dt}{5} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3}{5}(t-2)}{\sqrt{t^3}}\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{25}\int\frac{3t-6}{\sqrt{t^3}}dt=$$

$$=\frac{1}{25}\int\left(3t^{-\frac{1}{2}}-6t^{-\frac{3}{2}}\right)dt=\frac{1}{25}\left(6t^{\frac{1}{2}}+12t^{-\frac{1}{2}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{25}\left[6(5x+2)^{\frac{1}{2}}+12(5x+2)^{-\frac{1}{2}}\right]+C$$

c) $$\int 3x\cdot\sqrt[5]{4-x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=4-x \\ x=4-t \\ \dfrac{dx}{dt}=-1 \\ dx=-dt \end{array} \right| = \int -(12-3t)\sqrt[5]{t}\,dt = \int\left(3\cdot t^{\frac{6}{5}}-12\cdot t^{\frac{1}{5}}\right)dt=$$

$$= \frac{15}{11} \cdot t^{\frac{11}{5}} - 10 \cdot t^{\frac{6}{5}} + C = \frac{15}{11} \cdot (4-x)^{\frac{11}{5}} - 10 \cdot (4-x)^{\frac{6}{5}} + C$$

d) $$\int \frac{3x-5}{2x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x+1 \\ x = \dfrac{t-1}{2} \\ \dfrac{dt}{dx} = 2 \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3}{2}(t-1)-5}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int \frac{3t-13}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(3 - \frac{13}{t}\right) dt = \frac{1}{4}(3t - 13\ln|t|) + C = \frac{1}{4}\left[3(2x+1) - 13\ln|2x+1|\right] + C$$

e) $$\int \frac{e^x}{1+e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ \dfrac{dt}{dx} = e^x \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt =$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln|t+1| + C = e^x - \ln(1+e^x) + C$$

f) $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ t^2 = x+1 \\ x = t^2 - 1 \\ \dfrac{dx}{dt} = 2t \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t} 2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t} dt = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$$

7.4 Parciális integrálás

198. a) $f(x) = x$, $\quad g'(x) = 2e^{2x}$

$f'(x) = 1$, $\quad g(x) = e^{2x}$

$$\int 2xe^{2x} dx = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C$$

b) $f(x) = 4x + 2$, $g'(x) = e^{-x}$

$f'(x) = 4$, $g(x) = -e^{-x}$

$$\int (4x+2)\cdot e^{-x}dx = -(4x+2)e^{-x} + \int 4e^{-x}dx = -(4x+2)e^{-x} - 4e^{-x} + C$$

c) $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$

$f'(x) = 1$, $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$

$$\int \frac{x}{4}e^{\frac{x}{4}}dx = xe^{\frac{x}{4}} - \int e^{\frac{x}{4}}dx = xe^{\frac{x}{4}} - 4e^{\frac{x}{4}} + C$$

d) $f(x) = 10x - 3$, $g'(x) = e^{5x+1}$

$f'(x) = 10$, $g(x) = \frac{e^{5x+1}}{5}$

$$\int (10x-3)e^{5x+1}dx = (10x-3)\frac{e^{5x+1}}{5} - \int 2e^{5x+1}dx =$$

$$= (10x-3)\frac{3^{5x+1}}{5} - \frac{2}{5}e^{5x+1} + C$$

e) $f(x) = 5x$, $g'(x) = 2^x$

$f'(x) = 5$, $g(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

$$\int 5x\cdot 2^x dx = 5x\frac{2^x}{\ln 2} - \int 5\frac{2^x}{\ln 2}dx = 5x\frac{2^x}{\ln 2} - 5\frac{2^x}{\ln^2 2} + C$$

f) $f(x) = 3x - 2$, $g'(x) = 4^x$

$f'(x) = 3$, $g(x) = \frac{4^x}{\ln 4}$

$$\int (3x-2)4^x dx = (3x-2)\frac{4^x}{\ln 4} - \int 3\frac{4^x}{\ln 4}dx = (3x-2)\frac{4^x}{\ln 4} - 3\frac{4^x}{\ln^2 4} + C$$

g) $f(x) = x^2 + x + 3$, $g'(x) = e^{\frac{x}{2}}$

$f'(x) = 2x + 1$, $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

$$\int (x^2+x+3)e^{\frac{x}{2}}dx = 2(x^2+x+3)e^{\frac{x}{2}} - \int (2x+1)2e^{\frac{x}{2}}dx =$$

$f(x) = 2x + 1$, $g'(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

$f'(x) = 2$, $g(x) = 4e^{\frac{x}{2}}$

$$= 2(x^2 + x + 3)e^{\frac{x}{2}} - 4(2x+1)e^{\frac{x}{2}} + \int 8e^{\frac{x}{2}} dx =$$

$$= 2(x^2 + x + 3)e^{\frac{x}{2}} - 4(2x+1)e^{\frac{x}{2}} + 16e^{\frac{x}{2}} + C$$

h) $f(x) = x^2, \qquad g'(x) = 2^{1-x}$

$f'(x) = 2x, \qquad g(x) = -\dfrac{2^{1-x}}{\ln 2}$

$$\int x^2 2^{1-x} dx = -\frac{x^2 \cdot 2^{1-x}}{\ln 2} + \int 2x \frac{2^{1-x}}{\ln 2} dx =$$

$f(x) = 2x, \qquad g'(x) = \dfrac{2^{1-x}}{\ln 2}$

$f'(x) = 2, \qquad g(x) = -\dfrac{2^{1-x}}{\ln^2 2}$

$$= -\frac{x^2 \cdot 2^{1-x}}{\ln 2} - \frac{2x2^{1-x}}{\ln^2 2} + \int \frac{2}{\ln^2 2} 2^{1-x} dx = -\frac{x^2 2^{1-x}}{\ln 2} - \frac{2x2^{1-x}}{\ln^2 2} - \frac{2 \cdot 2^{1-x}}{\ln^3 2} + C$$

199. a) $f(x) = \ln x, \qquad g'(x) = x^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

b) $f(x) = \ln x, \qquad g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \ln x - \int \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \cdot \ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C$$

c) $f(x) = \ln 2x, \qquad g'(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2x} \cdot 2, \qquad g(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$\int \sqrt{x} \ln 2x\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln 2x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln 2x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

d) $f(x) = \ln 8x, \qquad g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{8x} \cdot 8, \qquad g(x) = -\dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln 8x}{x^2}dx = -\frac{\ln 8x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln 8x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

e) $\quad f(x) = \ln^2 x, \quad g'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}, \quad g(x) = x$$

$$\int 1\cdot \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx =$$

$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = 2x$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

f) $\quad f(x) = \log_3 x, \quad g'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3}, \quad g(x) = x$$

$$\int 1\cdot \log_3 x\,dx = x\log_3 x - \int \frac{dx}{\ln 3} = x\log_3 x - \frac{x}{\ln 3} + C$$

g) $\quad f(x) = \lg x, \quad g'(x) = \frac{1}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 10}, \quad g(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\int \frac{\lg x}{x^3}dx = -\frac{\lg x}{2x^2} + \int \frac{1}{2\ln 10}x^{-3}dx = -\frac{\lg x}{2x^2} - \frac{1}{4(\ln 10)x^2} + C$$

h) $\quad f(x) = \log_2(-5x), \quad g'(x) = x^7$

$$f'(x) = \frac{1}{-5x\ln 2}\cdot(-5) = \frac{1}{x\ln 2}, \quad g(x) = \frac{x^8}{8}$$

$$\int x^7\log_2(-5x)\,dx = \frac{x^8}{8}\log_2(-5x) - \int \frac{x^7}{8\ln 2}dx =$$

$$= \frac{x^8}{8}\log_2(-5x) - \frac{x^8}{64\ln 2} + C$$

7.5* Trigonometrikus függvények határozatlan integrálja

200. Van. A primitív függvények ilyen alakban adhatók meg:

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + C, & \text{ha } \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ x + C\ , & \text{ha } \ x \le 0, \end{cases}$$

ahol C bármilyen valós szám lehet. A két intervallumban $\left(\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\text{ és } \left]-\infty\ ;\ 0\right] \right)$ azonban a C értéke mindig egyenlő kell, hogy legyen (különben F nem lenne folytonos az $x=0$ helyen, és így nem is lenne differenciálható).

201. a) $\frac{1}{4}\int \sin x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos x\,dx + \int -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x + \operatorname{ctg} x + C$

b) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$

c) $\int \sin\frac{4x-2}{3}\,dx = -\frac{3}{4}\cdot\cos\frac{4x-2}{3} + C$

d) $\int \frac{4}{\cos^2(3x+2)}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\operatorname{tg}(3x+2) + C$

e) Alkalmazzuk a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ azonosságot!

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

f) $2\int (\sin x)\cdot(\cos x)^{-\frac{1}{5}}\,dx = -2\cdot\frac{(\cos x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = -\frac{5}{2}(\cos x)^{\frac{4}{5}} + C$

g) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

h) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}-1)\,dx = 4\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}-1)\,dx = -4\cos(\sqrt{x}-1) + C$

202. a) $$\int e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{ctg} x \\ \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \\ dx = -(\sin^2 x)\,dt \end{array} \right| = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\operatorname{ctg} x} + C$$

b▲) $$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{2} = \sin t \\ x = 2\sin t \\ \frac{dx}{dt} = 2\cos t \\ dx = 2\cdot\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{4-(2\sin t)^2}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= \int 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 4\cdot\int \cos^2 t dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= 4\int \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 2t+\sin 2t + C$$

Itt az eredeti x változóra nem térhetünk vissza, mivel az $x = 2\sin t$ egyenlőségből az eddigi ismereteink alapján nem tudjuk t-t kifejezni.

203. a)

$$f(x) = 7-2x, \qquad g'(x) = \cos\frac{x}{4}$$

$$f'(x) = -2, \qquad g(x) = 4\sin\frac{x}{4}$$

$$\int (7-2x)\cos\frac{x}{4}dx = 4(7-2x)\sin\frac{x}{4} + \int 8\sin\frac{x}{4}dx =$$

$$= 4(7-2x)\sin\frac{x}{4} - 32\cos\frac{x}{4} + C$$

b)

$$f(x) = 2x-x^2, \qquad g'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = 2-2x, \qquad g(x) = \sin x$$

$$\int (2x-x^2)\cos x\, dx = (2x-x^2)\sin x - \int (2-2x)\sin x\, dx =$$

$$f(x) = 2-2x, \qquad g'(x) = \sin x$$

$$f'(x) = -2, \qquad g(x) = -\cos x$$

$$= (2x-x^2)\sin x + (2-2x)\cos x + \int 2\cos x\, dx =$$

$$= (2x-x^2)\sin x + (2-2x)\cos x + 2\sin x + C$$

c)

$$f(x) = 3^x, \qquad g'(x) = \sin x$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3, \qquad g(x) = -\cos x$$

$$\int 3^x \sin x\, dx = -3^x \cos x + \int 3^x (\ln 3)\cos x\, dx =$$

$$f(x) = 3^x \ln 3, \qquad g'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = 3^x \ln^2 3, \qquad g(x) = \sin x$$

$$= -3^x \cos x + 3^x(\ln 3)\sin x - \int 3^x(\ln^2 3)\sin x\, dx$$

$$\int 3^x \sin x\, dx = \frac{1}{1+\ln^2 3}\left[-3^x\cos x + 3^x(\ln 3)\sin x\right] + C$$

d)

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \qquad g(x) = \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}dx =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^4 x} + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

Innen átrendezéssel kapjuk:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x} + 2\mathrm{tg}x\right) + C$$

7.6 Vegyes feladatok

204. Lehet, ha $C_1 = C_2$. Ekkor ugyanis F folytonos és differenciálható az értelmezési tartomány minden pontjában.

205. A primitív függvények: $F(x) = 4\frac{x^9}{9} + 3\frac{x^2}{2} + C$.

Mivel $F(0) = C = 1$, ezért a $(0\,;1)$ ponton átmenő primitív függvény:

$F(x) = 4\frac{x^9}{9} + 3\frac{x^2}{2} + 1$.

206. a) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot \ln x\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

b) $\int (3^{5-2x} + (5-2x)^3)\,dx = \frac{3^{5-2x}}{-2\ln 3} + \frac{(5-2x)^4}{-8} + C$

207. a) $\int (3^{-2x} + 4^{2x-3})\,dx = \frac{3^{-2x}}{-2\ln 3} + \frac{4^{2x-3}}{2\ln 4} + C$

b) $\int \frac{3^x + 4^x}{4^x}dx = \int \left[\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1\right]dx = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\frac{3}{4}} + x + C$

c) $\int \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^x}dx = \frac{1}{\ln\frac{4}{3}}\int \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln\frac{4}{3}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^x}dx = \frac{1}{\ln\frac{4}{3}}\ln\left[\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1\right] + C$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{5x^2-3}}dx = \frac{1}{5}\int 10x(5x^2-3)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}(5x^2-3)^{\frac{1}{2}} + C$

e) $$\int \frac{2x}{\sqrt{5x-3}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 5x-3 \\ \frac{dt}{dx} = 5 \\ dx = \frac{dt}{5} \\ x = \frac{t+3}{5} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{5}(t+3)}{\sqrt{t}}\frac{dt}{5} = \frac{2}{25}\int \left(t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}} \right) dt =$$

$$= \frac{2}{25}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = \frac{4}{75}(5x-3)^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{25}(5x-3)^{\frac{1}{2}} + C$$

f) $$\int \frac{2x}{5x^2-3}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{10x}{5x^2-3}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|5x^2-3\right| + C$$

g) $$\int (10-x^3)\cdot(4-\sqrt{x})\,dx = \int (40-4x^3-10\sqrt{x}+x^3\sqrt{x})\,dx =$$

$$= \int \left(40-4x^3-10x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{7}{2}} \right) dx = 40x - x^4 - \frac{20}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + C$$

h) $$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

i) $$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx =$$

$$= x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$ (Kétszer parciálisan integráltunk.)

j) Tagonként integrálunk; az első tagnál a parciális integrálás módszerét alkalmazzuk.

$$\int \left(x5^x + x5^{x^2} \right) dx = x\frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}\,dx + \frac{1}{2}\int 2x5^{x^2}\,dx =$$

$$= x\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C$$

k) $$\int \frac{5x+2}{x-3}\,dx = \int \frac{(5x-15)+17}{x-3}\,dx = \int \left(5 + \frac{17}{x-3} \right) dx =$$

$$= 5x + 17\cdot\ln\left| x-3 \right| + C$$

l) A feladatot megoldatjuk a parciális integrálás módszerével vagy helyettesítéssel. Helyettesítéssel:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 1+x \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{array} \right| \int \frac{(t-1)^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t^2-2t+1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right) dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C$$

m) $\displaystyle\int \frac{x\lg x + x^3 \lg x}{x^2}\,dx = \int \frac{\lg x}{x}\,dx + \int x \lg x\,dx =$

$$= (\ln 10)\frac{\lg^2 x}{2} + \frac{x^2}{2}\lg x - \int \frac{x}{2\ln 10}\,dx = (\ln 10)\frac{\lg^2 x}{2} + \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4\ln 10} + C$$

n) $\displaystyle\int (x-1)\ln(x^2-2x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 2x \\ \dfrac{dt}{dx} = 2x-2 \\ dx = \dfrac{dt}{2(x-1)} \end{array} \right| = \int \ln t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt =$

$$= \frac{1}{2}(t\ln t - t) + C = \frac{1}{2}(x^2-2x)\cdot\ln(x^2-2x) - \frac{1}{2}(x^2-2x) + C$$

A helyettesítés után parciálisan integráltunk.

7.7 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Nem igaz. Pl. a 188/c feladatban szereplő f függvénynek nincs primitív függvénye.

b) Nem igaz; ugyanis léteznek nem differenciálható függvények. Pl. Az $F(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ függvény nem tekinthető egyetlen függvény primitív függvényének sem, mert az $x = 0$ helyen nem differenciálható.

c) Nem igaz. A primitív függvények végtelen sokan vannak, de nem *megszámlálhatóan* végtelen sokan. Csak konstansban térnek el egymástól, ahol a konstans tetszőleges valós számot jelent; a valós számok halmaza viszont nem megszámlálható számosságú.

d) Igaz.

e) Igaz.

f) Igaz.

2. a) Igaz. (TK. 7.2. tétel b) része)

b) Igaz. (TK. 7.2. tétel következménye)

c) Nem igaz.

d) Nem igaz.

3. A B válasz a helyes, mert

$$(-\ln(x-3)+C)' = -\frac{1}{x-3} + 0 = \frac{1}{3-x}, \qquad x > 3\,.$$

(A C válasz azért nem helyes, mert hiányzik a „C” konstans. Így lenne helyes: $-\ln|3-x| + C$.)

4. Az A válasz a helyes.

Az $f(x) = x^{\frac{8}{5}}$ függvény primitív függvényei: $F(x) = \frac{5}{13} x^{\frac{13}{5}} + C$ alakúak.

Mivel $F(1) = \frac{5}{13} + C = 0$, ezért $C = -\frac{5}{13}$ adódik.

5. A B válasz a helyes, ugyanis

$$F'(x) = \left(\frac{(4x+3)^{10}}{40} + \frac{3}{40} \right)' = \frac{10(4x+3)^9 \cdot 4}{40} + 0 = (4x+3)^9 = f(x).$$

6. A C válasz a helyes, ugyanis

$$\int \frac{1-x^2}{\sqrt{3x-x^3}} dx = \frac{1}{3} \int (3-3x^2)(3x-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(3x-x^3)^{\frac{1}{2}} + C.$$

7. Az A válasz a helyes, ugyanis

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \lg x \, dx = 2\sqrt{x} \lg x - \int \frac{2}{\ln 10} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \lg x - \frac{2}{\ln 10} 2\sqrt{x} + C.$$

(Parciálisan integráltunk.)

8. A B válasz a helyes, ugyanis

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x+3}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2x+3} \\ x = \dfrac{t^2-3}{2} \\ \dfrac{dx}{dt} = t \\ dx = t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3}{2}(t^2-3)+2}{t} t \, dt = \int \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{5}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{(2x+3)^3} - \frac{5}{2} \sqrt{2x+3} + C.$$

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Határozott integrál. Newton-Leibniz-formula

208. a) A $[0\,;1]$ intervallum osztópontjai:

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1.$$

$$s_n=\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2}{n}+1\right)+\left(2\cdot\frac{2}{n}+1\right)+\ldots+\left(2\frac{n-1}{n}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{n+\frac{1}{n}\left[2+4+\ldots+2(n-1)\right]\right\}=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2}(2+2n-2)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}(2n-1)=2-\frac{1}{n}$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(2\cdot\frac{1}{n}+1\right)+\left(2\cdot\frac{2}{n}+1\right)+\ldots+\left(2\cdot\frac{n}{n}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}(2+4+\ldots+2n)\right]=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}(2+2n)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}(2n+1)=2+\frac{1}{n}$$

$$\lim s_n=\lim S_n=2$$

$$\int_0^1(2x+1)\,dx=\left[x^2+x\right]_0^1=2-0=2$$

b) Az $[1\,;2]$ intervallum osztópontjai:

$$1,\ 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{2}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{n-1}{n},\ 2.$$

$$s_n=\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}(1+2+3+\ldots+n-1)\right]=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2}(1+n-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left(n+\frac{n-1}{2}\right)=1+\frac{n-1}{2n}$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}(1+2+\ldots+n)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}(n+1)\right]=\frac{1}{n}\left(n+\frac{n+1}{2}\right)=1+\frac{n+1}{2n}$$

$$\lim s_n = \lim S_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

c) A $[0\,;1]$ intervallum osztópontjai:

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1\,.$$

$$s_n = \frac{1}{n}\left[0^2 + \frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n^2}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

$$\lim s_n = \lim S_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

209. a) $$\int_1^2 10^x\,dx = \left[\frac{10^x}{\ln 10}\right]_1^2 = \frac{100}{\ln 10} - \frac{10}{\ln 10} = \frac{90}{\ln 10}$$

b) $$\int_0^1 (5 - 3x^2 + \sqrt{x})\,dx = \left[5x - x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 5 - 1 + \frac{2}{3} - 0 = \frac{14}{3}$$

c) $$\int_{-e^2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\,\right]_{-e^2}^{-1} = \ln|-1| - \ln\left|-e^2\right| = \ln 1 - \ln e^2 = 0 - 2 = -2$$

d) $$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4})^3 + 2\sqrt{4} - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{20}{3}$$

e) $\displaystyle\int_1^3 (6-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(6-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\cdot\frac{3}{2}}\right]_1^3 = 0+\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4x(1+x^2)^5\,dx = 2\int_{-1}^{1} 2x(1+x^2)^5\,dx = 2\left[\frac{(1+x^2)^6}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^6}{3}-\frac{2^6}{3}=0$

g) Parciálisan integrálunk:

$$f(x)=x\,, \qquad g'(x)=e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f'(x)=1\,, \qquad g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}} + \left[-4e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -2e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{2}} + 4e^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{e} - \frac{6}{\sqrt{e}}$$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+2e^x}{x^2+2e^x}\,dx = \left[\ln(x^2+2e^x)\right]_0^1 = \ln(1+2e)-\ln 2$

i) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}}9^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx = -2\int_1^4 -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}9^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx = -2\left[\frac{9^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\ln 9}\right]_1^4 = -\frac{6}{\ln 9}+\frac{18}{\ln 9}=\frac{12}{\ln 9}$

j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx = \left|\begin{array}{c} t=5-4x \\ x=\dfrac{5-t}{4} \\ \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{4} \\ dx=-\dfrac{dt}{4} \\ x=-1 \Rightarrow t=9 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array}\right| = \int_9^1 -\frac{5-t}{4\sqrt{t}}\frac{dt}{4} = \frac{1}{16}\int_1^9 \frac{5-t}{\sqrt{t}}\,dt =$

$$= \frac{1}{16}\int_1^9 \left(5t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{16}\left[10t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{16}\left(30-18-10+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

k) $$\int_{-1}^{2,5} \frac{4x-1}{\sqrt[3]{3+2x}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = 3+2x & \\ x = \frac{t-3}{2} & x=-1 \Rightarrow t=1 \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} & x = 2,5 \Rightarrow t = 8 \\ dx = \frac{dt}{2} & \end{array} \right| = \int_1^8 \frac{2t-7}{\sqrt[3]{t}}\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^8 \left(2t^{\frac{2}{3}} - 7t^{-\frac{1}{3}}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{21}{2}t^{\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \frac{96}{5} - 21 - \left(\frac{3}{5} - \frac{21}{4}\right) = 2,85$$

l) Parciálisan integrálunk:

$$f(x) = \ln x\,, \qquad g'(x) = x^{-4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad g(x) = \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$\int_1^e x^{-4}\cdot \ln x\,dx = \left[-\frac{1}{3x^3}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{3x^4} = -\frac{1}{3e^3} + \left[-\frac{1}{9x^3}\right]_1^e =$$

$$= -\frac{1}{3e^3} - \frac{1}{9e^3} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{9e^3} + \frac{1}{9}$$

210.* a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{6}\,dx = \left[-6\cos\frac{x}{6}\right]_{-\pi}^{\pi} = -6\cos\frac{\pi}{6} + 6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -6\cos\frac{\pi}{6} + 6\cos\frac{\pi}{6} = 0$$

b) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{2}{3}} \cos x\,dx = \left[\frac{3}{5}(\sin x)^{\frac{5}{3}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{2+5\cos x}\,dx = -\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin x}{2+5\cos x}\,dx = -\frac{4}{5}\left[\ln|2+5\cos x|\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4}{5}(\ln 2 - \ln 7) = \frac{4}{5}\ln\frac{7}{2}$$

d) Parciálisan integrálunk:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 6x\cos 3x\,dx = \left[2x\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3x dx = \left(\frac{2\pi}{3}\sin\pi - \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\left[2\frac{\cos 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\left(\frac{2}{3}\cos\pi-\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$$

211. a) $\displaystyle\int_{-4}^{2}|\,x\,|\,dx=\int_{-4}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{2}x\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=(0+8)+(2-0)=10$

b) $\displaystyle\int_{0}^{8}|x-10|dx=\int_{0}^{8}(10-x)\,dx=\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{8}=80-32=48$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-2x\right|dx=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(2x-x^2)\,dx=$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}+1\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$

d) $\displaystyle\int_{1}^{3}\left|1-\frac{2}{x}\right|dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)dx+\int_{2}^{3}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx=\left[2\ln|x|-x\right]_{1}^{2}+\left[x-2\ln|x|\,\right]_{2}^{3}=$

$=(2\ln 2-2+1)+(3-2\ln 3-2+2\ln 2)=4\ln 2-2\ln 3$

212. a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(2^x-1)\,dx=$

$\displaystyle=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_{0}^{2}=\left(-\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{4}{\ln 2}-2-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{3}{\ln 2}-\frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4}f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^3}\,dx+\int_{-1}^{1}(3x+1)\,dx+\int_{1}^{4}\frac{4}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x^2}\right]_{-2}^{-1}+\left[3\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}+$

$\displaystyle+\left[-\frac{4}{x}\right]_{1}^{4}=\left(-1+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}+1-\frac{3}{2}+1\right)+\left(-1+4\right)=4{,}25$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1}\sqrt{-x-1}\,dx+\int_{-1}^{2}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[-\frac{2}{3}(-x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{-1}+$

$\displaystyle+\left[x+\ln|x+2|\,\right]_{-1}^{2}=\frac{2}{3}+(2+\ln 4+1)=\frac{11}{3}+\ln 4$

213. a) Ha $1\le x<e$:

$\displaystyle G(x)=\int_{1}^{x}\ln t\,dt=\left[t\ln t\right]_{1}^{x}-\int_{1}^{x}1\,dt=x\ln x-\left[\,t\,\right]_{1}^{x}=x\ln x-x+1$

Ha $x > e$: $G(x) = \int_1^e \ln t\,dt + \int_e^x 0\,dt = [t\ln t - t]_1^e = 1$

Összefoglalva:

$$G(x) = \begin{cases} x\ln x - x + 1, & \text{ha } 1 \le x < e \\ 1, & \text{ha } x > e \end{cases}$$

b) Ha $-1 \le x \le 0$: $G(x) = \int_{-1}^x 0\,dt = 0$

Ha $0 < x \le 1$:

$$G(x) = \int_{-1}^0 0\,dt + \int_0^x \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)dt = \left[\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}\right]_0^x = \frac{1}{4}(x^2 + x)$$

Ha $1 < x \le 3$: $G(x) = \int_{-1}^0 0\,dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right)dt + \int_1^x 2^{-t}\ln 2\,dt =$

$$= \left[\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}\right]_0^1 + \left[-2^{-t}\right]_1^x = \frac{1}{2} - 2^{-x} + \frac{1}{2}$$

Összefoglalva:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{4}(x^2 + x), & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 1 - 2^{-x}, & \text{ha } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

8.2 Improprius integrál

214. a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-5}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-4b^4} + \frac{1}{4}\right) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{b^2} - \frac{3}{2}\right) = \infty$

c) $\int_{-\infty}^1 e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_a^1 = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{2a}}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}$

d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{18x+3}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{2}{18}\cdot\ln|18x+3|\right]_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{9}\ln 15 - \frac{1}{9}\ln|18a+3|\right) =$

$= \frac{1}{9}\ln 15 - \infty = -\infty$

e) $$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(2-2x)^3}}=\int_{-\infty}^{0}(2-2x)^{-\frac{3}{2}}dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{(2-2x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\frac{1}{-2}\right]_a^0=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2-2a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

f) $$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\left[\ln\left|1+\frac{1}{e^x}\right|\right]_0^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\ln\left(1+\frac{1}{e^b}\right)+\ln 2\right]=-\ln(1+0)+\ln 2=\ln 2$$

g) $$\int_0^{\infty}xe^{-5x}dx=\lim_{b\to\infty}\left\{\left[x\frac{e^{-5x}}{-5}\right]_0^b+\int_0^b\frac{e^{-5x}}{5}dx\right\}=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b}{-5e^{5b}}+\left[\frac{e^{-5x}}{-25}\right]_0^b\right\}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{-5e^{5b}}+\frac{e^{-5b}}{-25}+\frac{1}{25}\right)=0+0+\frac{1}{25}=\frac{1}{25}$$

h) $$\int_1^{\infty}x\cdot 3^{1-x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_1^b-2x\cdot 3^{1-x^2}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{3^{1-x^2}}{\ln 3}\right]_1^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{1-b^2}}{\ln 3}+\frac{1}{2\ln 3}\right)=0+\frac{1}{2\ln 3}=\frac{1}{2\ln 3}$$

i) $$\int_e^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_e^b\frac{1}{x}(\ln x)^{-\frac{3}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-2(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\right]_e^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{\ln b}}+2\right)=$$

$$=0+2=2$$

j*) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b(\cos x)(\sin x+2)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{\sin x+2}\right]_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}(2\sqrt{\sin b+2}-2\sqrt{2})=\text{divergens}$$

215. a) $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b e^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_a^b=$$

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(-2e^{-\frac{b}{2}}+2e^{-\frac{a}{2}}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-2e^{-\frac{b}{2}}\right)+\lim_{a\to-\infty}\left(2e^{-\frac{a}{2}}\right)=0+\infty=\infty$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(-\frac{1}{2}\int_a^b -2x\,e^{-x^2}\,dx\right) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(-\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_a^b\right) =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-a^2}\right) = 0+0=0$$

(Az eredmény nem meglepő, hiszen az integrandus páratlan függvény; ilyenkor a $\left]-\infty\,;\,\infty\right[$ intervallumban vett improprius integrál konvergencia esetén csak 0 lehet.)

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx + \int_4^{\infty} 0dx = \left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 2-1=1$$

d) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^{\infty} x\cdot 3^{-x+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-x\frac{3^{-x+1}}{\ln 3}\right]_1^b + \int_1^b \frac{3^{-x+1}}{\ln 3}\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{3^{b-1}\cdot\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}+\left[-\frac{3^{-x+1}}{\ln^2 3}\right]_1^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b}{3^{b-1}\cdot\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}-\frac{3^{-b+1}}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^2 3}\right) = 0+\frac{1}{\ln 3}-0+\frac{1}{\ln^2 3} = \frac{\ln 3+1}{\ln^2 3}$$

e) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^2}\,dx + \int_{-1}^{2} 4(x-1)^3\,dx + \int_2^{\infty} 2^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2x}\right]_a^{-1} + \left[(x-1)^4\right]_{-1}^2 + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\right) + (1-16) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2^{-b}}{\ln 2}+\frac{1}{4\ln 2}\right) = \frac{1}{2}-15+\frac{1}{4\ln 2}$$

216. a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{3} 0dx + \int_3^{\infty} \frac{A}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} A\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty} A\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{18}\right) =$$

$$= A\left(0+\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{18}A = 1 \quad\Rightarrow\quad A=18$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{A\cdot 7^x}{1+7^x}\,dx + \int_0^{\infty} 0dx = \lim_{a\to-\infty} A\left[\frac{1}{\ln 7}\ln(1+7^x)\right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} A\left[\frac{\ln 2}{\ln 7}-\frac{1}{\ln 7}\ln(1+7^a)\right] = A\frac{\ln 2}{\ln 7}-0 = A\frac{\ln 2}{\ln 7} = 1 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{\ln 7}{\ln 2}$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} e^{3x-6}dx + A\int_{2}^{\infty} x^{-4}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{3x-6}}{3}\right]_a^2 + A\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^0}{3}-\frac{e^{3a-6}}{3}\right) + A\cdot\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{3}+A\frac{1}{24}=1 \quad\Rightarrow\quad A=16$$

217.* a) $$\int_0^1 \frac{1}{x^5}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\int_\varepsilon^1 x^{-5}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\varepsilon^4}\right)=\infty$$

b) $$\int_3^6 \frac{2}{x-3}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[2\ln|x-3|\right]_{3+\varepsilon}^6 = \lim_{\varepsilon\to0+0}(2\ln3-2\ln|\varepsilon|) =$$

$$= 2\ln3-(-\infty)=\infty$$

c) $$\int_{-27}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{-27}^{-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[3\cdot\sqrt[3]{x}\right]_{-27}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}(3\cdot\sqrt[3]{-\varepsilon}-3\cdot\sqrt[3]{-27}) = 0+9=9$$

d) $$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(e^{-1}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$$

e) $$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to0+0}\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-2}dx + \lim_{\delta\to0+0}\int_\delta^1 x^{-2}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta\to0+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\delta^1 = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\delta\to0+0}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right) =$$

$=\infty+\infty$ divergens.

f) $$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \int_0^1 2x\cdot(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}dx + \int_1^3 2x\cdot(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+0}\left[3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to0+0}\left[3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}\right]_{1+\delta}^3 = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(3\cdot(\varepsilon^2-2\varepsilon)^{\frac{1}{3}}+3\right)+$$

$$+ \lim_{\delta\to0+0}\left[6-3(2\delta+\delta^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 3+6=9$$

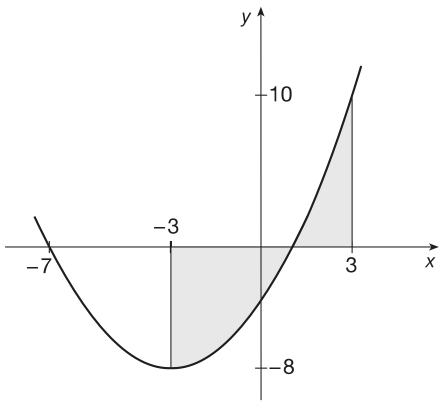
8.3 Területszámítás

218. a) $\int\limits_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$

b) $\int\limits_{-2}^{2} \left|x^3\right| dx = \int\limits_{-2}^{0} -x^3 dx + \int\limits_0^2 x^3 dx = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8$

c) $f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad T = \int\limits_{-1}^{1} -(x - e^x)\, dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$

d) Tekintsük az M 98. ábrát!



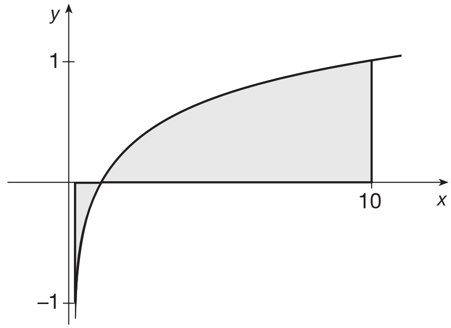
M 98. ábra

$$T = \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{7}{2}\right) dx + \int\limits_1^3 \left(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}\right) dx = 30\frac{2}{3}$$

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x^2+1)+2x}{x^2+1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx =$

$= \left[x + \ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1} = 2$

f) Ábrázoljuk az f függvényt! (M 99. ábra)



M 99. ábra

$$T=\int_{\frac{1}{10}}^{10}\left|\lg x\right|dx=\int_{\frac{1}{10}}^{1}-\lg x\,dx+\int_{1}^{10}\lg x\,dx=$$

Parciális integrálással kapjuk:

$$=\left[\frac{x}{\ln 10}-x\lg x\right]_{\frac{1}{10}}^{1}+\left[x\lg x-\frac{x}{\ln 10}\right]_{1}^{10}=\left(\frac{1}{\ln 10}-\frac{1}{10\ln 10}-\frac{1}{10}\right)+$$

$$+\left(10-\frac{10}{\ln 10}+\frac{1}{\ln 10}\right)=-\frac{81}{10\ln 10}+9{,}9$$

g) $$\int_0^1(2^x-1)\,dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^1+\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\frac{1}{\ln 2}$$

h) $$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx+\lim_{a\to-\infty}\left[-\int_a^{-1}-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx\right]=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_a^{-1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[0+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}$$

i) Felhasználjuk, hogy f páros függvény, mert $f(-x)=\frac{1}{e^{|-x|}}=\frac{1}{e^{|x|}}=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

$$T=2\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x}dx=2\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b=2\lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1)=2$$

j*) $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 4[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$

219. a) Metszéspontok: $(x-2)^2 = 2x+4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ és $x_2 = 6$

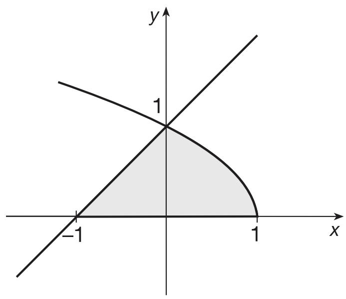
$$T = \int_0^6 \left[(2x+4)-(x-2)^2\right]dx = \int_0^6 (-x^2+6x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^6 = 36$$

b) Metszéspontok: $\frac{x^2}{4} - x + 2 = -\frac{x^2}{2} + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$ és $x_2 = 4$

$$T = \int_0^4 \left[\left(-\frac{x^2}{2}+2x+2\right)-\left(\frac{x^2}{4}-x+2\right)\right]dx = \int_0^4 \left(-\frac{3x^2}{4}+3x\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^4 = 8$$

c) Tekintsük az M 100. ábrát!



M 100. ábra

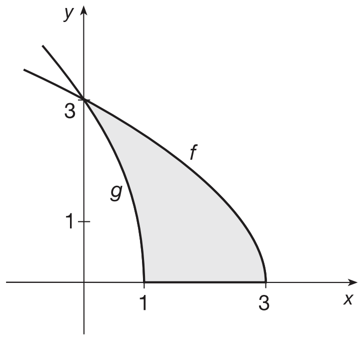
Metszéspont: $\sqrt{1-x} = x+1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$$T = \int_{-1}^0 (x+1)\, dx + \int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{7}{6}$$

d) Metszéspontok: $\frac{3}{x} = -x+4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ és $x_2 = 3$

$$T = \int_1^3 \left(-x+4-\frac{3}{x}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+4x-3\ln|x|\right]_1^3 = 4-3\ln 3$$

e) Tekintsük az M 101. ábrát!



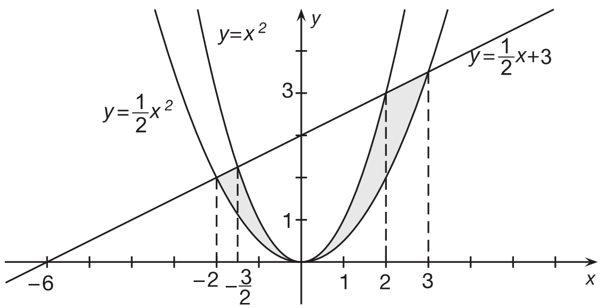
M 101. ábra

$$T=\int_0^3 \sqrt{9-3x}\,dx-\int_0^1 3\sqrt{1-x}\,dx=\left[-\frac{2}{9}(9-3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3-\left[-2(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=4$$

f) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\qquad f^{-1}(x)=x^3$

$$T=2\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^3)\,dx=2\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=1$$

g) Tekintsük az M 102. ábrát!



M 102. ábra

Metszéspontok:

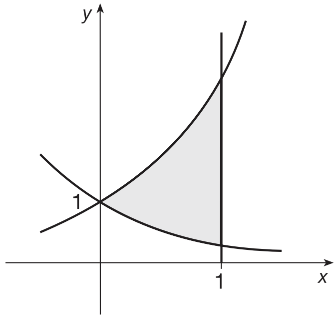
1./ $\frac{1}{2}x+3=x^2$, azaz $2x^2-x-6=0$. Innen $x_1=-\frac{3}{2}$ és $x_2=2$.

2./ $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x^2$, azaz $x^2-x-6=0$. Innen $x_1=-2$ és $x_2=3$.

$$T=\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x+3-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\int_{-\frac{3}{2}}^{2}\left(\frac{1}{2}x+3-x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{4}+3x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{3}-\left[\frac{x^2}{4}+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{3}{2}}^{2}=-2+\frac{63}{16}+\frac{4}{3}\approx 3{,}27$$

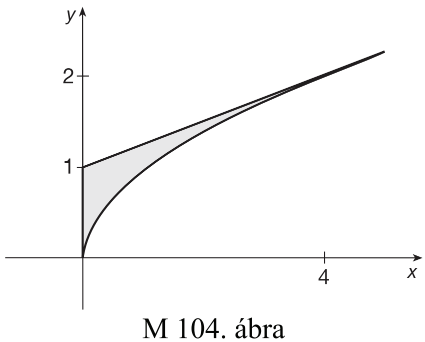
220. Tekintsük az M 103. ábrát!



M 103. ábra

$$T=\int_{0}^{1}(3^x-3^{-x})\,dx=\left[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{-\ln 3}\right]_0^1=\frac{4}{3\ln 3}$$

221. Tekintsük az M 104. ábrát!

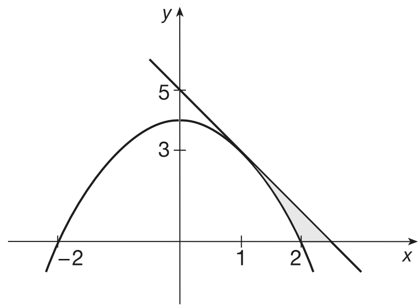


M 104. ábra

A $P(4\,;2)$ ponton átmenő érintő egyenlete: $y=\frac{1}{4}x+1$.

$$T=\int_0^4\left(\frac{1}{4}x+1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{8}+x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{2}{3}$$

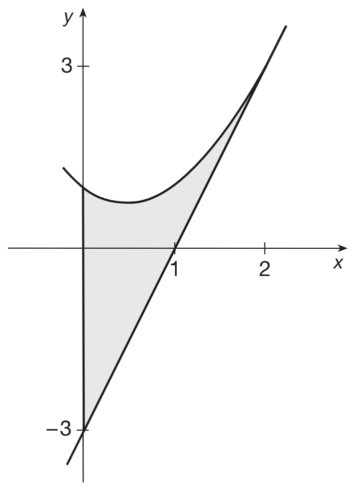
222. A $P_0(1\,;3)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y=-2x+5$.
A kérdéses területet az M 105. ábra mutatja.



M 105. ábra

$$T=\frac{\frac{3}{2}\cdot 3}{2}-\int_1^2(-x^2+4)\,dx=\frac{9}{4}-\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2=\frac{7}{12}$$

223. A $P_0(2\,;3)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y=3x-3$.
A kérdéses területet az M 106. ábra mutatja.



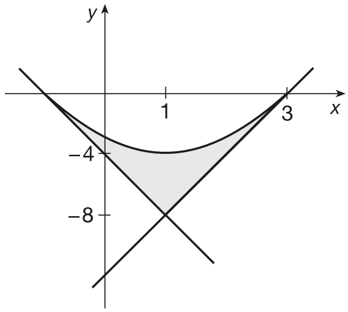
M 106. ábra

$$T = \int_0^2 \left[(x^2 - x + 1) - (3x - 3) \right] dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx = \int_0^2 (x-2)^2\, dx =$$

$$= \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

224. $f(x) = (x-1)^2 - 4$

Tekintsük az M 107. ábrát!



M 107. ábra

A szimmetria miatt elegendő az egyik érintő egyenletét felírni. A $(3\,;\,0)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y = 4x - 12$.

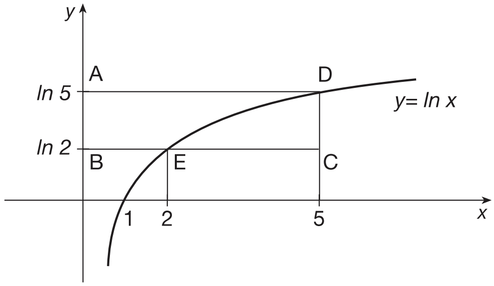
$$T = 2\int_1^3 \left[(x^2 - 2x - 3) - (4x - 12) \right] dx = 2\int_1^3 (x^2 - 6x + 9)\, dx = 2\int_1^3 (x-3)^2\, dx =$$

$$= 2\left[\frac{(x-3)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{16}{3}$$

225. a) $T = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |f(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\ln x\, dx + \int_1^e \ln x\, dx = -[x\ln x - x]_{\frac{1}{e}}^{1} + [x\ln x - x]_1^e =$

$= 2 - \dfrac{2}{e}$

b) I. megoldás: Tekintsük az M 108. ábrát!



M 108. ábra

A keresett terület az $ABCD$ téglalap és a CDE görbevonalú háromszög területének a különbsége.

$$T = (\ln 5 - \ln 2)5 - \left[\int_2^5 \ln x\, dx - 3\ln 2\right] =$$

$$= (\ln 5 - \ln 2)5 - \left(\left[x\ln x - x\right]_2^5 - 3\ln 2\right) = 3$$

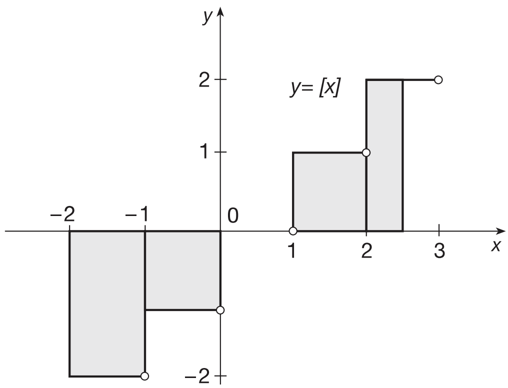
II. megoldás: Az inverz függvény segítségével számítjuk ki a területet.

$$T = \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^y dy = \left[e^y\right]_{\ln 2}^{\ln 5} = e^{\ln 5} - e^{\ln 2} = 5 - 2 = 3$$

226. $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad x \in \mathbf{R}$

$$T = \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx = \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_0^3 = 3(e-1)$$

227. Tekintsük az M 109. ábrát!



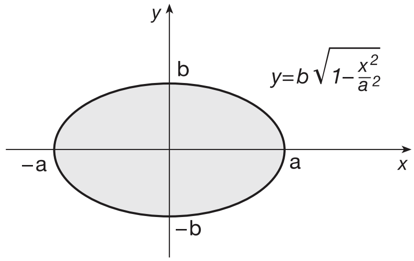
M 109. ábra

A konstans szakaszokból álló integrandus ábrájáról leolvasható, hogy

$$\int_{-2}^{2,5} [\,x\,]\,dx = -1\,,$$

ugyanis szakaszonként integrálva, ha $f(x) > 0$, akkor az integrál értéke a függvénygörbe alatti területtel, ha $f(x) < 0$, akkor pedig a függvénygörbe feletti terület -1-szeresével egyenlő.

228.* Tekintsük az M 110. ábrát!



M 110. ábra

Az ellipszis egyenletéből kifejezzük y-t:

$$y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ .$$

A szimmetria miatt elegendő az

$$f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad x \in [-a\ ;\ a]$$

függvény alatti területet kiszámítani a $[0\ ;\ a]$ intervallumban, mert az ellipszis területe ennek 4-szerese.

$$T = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left|\begin{array}{lll} \frac{x}{a} = \sin t & & \\ x = a\sin t & x = 0 \Rightarrow & t = 0 \\ \frac{dx}{dt} = a\cos t & x = a \Rightarrow & t = \frac{\pi}{2} \\ dx = a\cos t\,dt & & \end{array}\right| =$$

$$= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 4ab\frac{\pi}{4} = ab\pi$$

8.4 Vegyes feladatok

229. a) Mivel $x^3-1 \begin{cases} >0, & \text{ha } x>1 \\ <0, & \text{ha } x<1 \end{cases}$, ezért

$$\int_{-1}^{2}\left|x^3-1\right|dx=\int_{-1}^{1}(1-x^3)\,dx+\int_{1}^{2}(x^3-1)\,dx=\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_{1}^{2}=4{,}75$$

b) $$\int_{1}^{2}\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\frac{1}{3}\int_{1}^{2}\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\frac{1}{3}\left[\ln(e^{3x}+1)\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3}\left[\ln(e^6+1)-\ln(e^3+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{e^6+1}{e^3+1}$$

c) $$\int_{-1}^{1}\frac{2x-1}{\sqrt{x+2}}dx=\left|\begin{array}{c} t=x+2 \\ x=t-2 \\ \dfrac{dx}{dt}=1 \\ dx=dt \\ x=-1 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{array}\right|=\int_{1}^{3}\frac{2t-4-1}{\sqrt{t}}dt=\int_{1}^{3}\frac{2t-5}{\sqrt{t}}dt=$$

$$=\int_{1}^{3}\left(2t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-10t^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{3}=\frac{4}{3}(\sqrt{3})^3-10\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}-10\right)=$$

$$=-6\sqrt{3}+\frac{26}{3}$$

d) $$\int_{0}^{2}x^2(x^3+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\int_{0}^{2}3x^2(x^3+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\left[-2(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_{0}^{2}=$$

$$=-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

e) Parciálisan integrálunk:

$$\int_{1}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\,dx=\left[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right]_{1}^{9}-\int_{1}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=6\ln3-\left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{9}=$$

$$=6\ln3-6+2=6\ln3-4$$

f*) $$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}dx=\left[-\sin\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi=-1+0=-1$$

230. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(2x+5)^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-3}(2x+5)^{-2}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2(2x+5)}\right]_a^{-3}=$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2a+5)}\right]=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty}x\sqrt[3]{e^{-x}}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left\{\left[-3xe^{-\frac{x}{3}}\right]_0^b+\int_0^b 3e^{-\frac{x}{3}}\,dx\right\}=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{-3b}{e^{\frac{b}{3}}}+\left[-9e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^b\right\}=$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-3\frac{b}{e^{\frac{b}{3}}}-9e^{-\frac{b}{3}}+9\right\}=0-0+9=9$$

c*) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+0\\ b\to\infty}}\left(-2\int_\varepsilon^b-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+0\\ b\to\infty}}\left(-2\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^b\right)=$

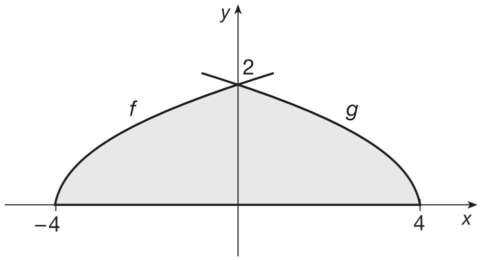
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0+0\\ b\to\infty}}\left(-2e^{-\sqrt{b}}+2e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-2e^{-\sqrt{b}}\right)+\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(2e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right)=0+2=2$$

231. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}e^{Ax}dx+\int_0^{\infty}e^{-Ax}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{Ax}\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_e^b e^{-Ax}dx=$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{Ax}}{A}\right]_a^0+\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-Ax}}{A}\right]_0^b=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{A}-\frac{e^{Aa}}{A}\right)+\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-Ab}}{A}+\frac{1}{A}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{A}-0\right)+\left(0+\frac{1}{A}\right)=\frac{2}{A}=1\ \Rightarrow\ A=2$$

232. Készítsünk ábrát! (M 111. ábra)



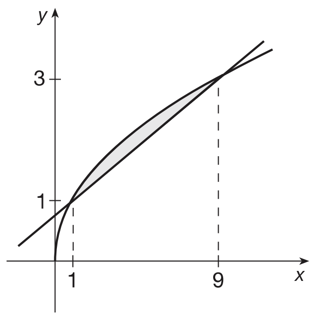
M 111. ábra

$$T = 2\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx = 2\left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

233. A hiperbola $P_0\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$ pontjához húzott érintő egyenlete: $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

Az érintő és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvény grafikonjának metszéspontjai:

$\sqrt{x} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ és $x_2 = 9$



M 112. ábra

$$T = \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)dx = \left[\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{4}\right]_1^9 = \frac{4}{3}$$

8.5 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Hamis. Ellenpélda: TK. 8.3. példa.

b) Igaz, ugyanis minden differenciálható függvény folytonos, a folytonos függvények pedig integrálhatók a TK. 8.2. tétel értelmében.

c) Igaz a TK. 8.3. tétel b) része szerint.

d) Hamis (vagyis a 8.3. tétel b) része nem megfordítható). Ellenpélda: legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases} \qquad x \in [0\,;\,1] \text{ és}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -1, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases} \qquad x \in [0\,;\,1].$$

Ekkor $(f+g)(x) = 1$, ha $x \in [0\,;\,1]$.

$f+g$ integrálható, de f és g nem integrálható a $[0\,;1]$ intervallumon.

e) Igaz. Ez következik a 8.3. tételből, ugyanis:
$$\int_a^b (f-g)=\int_a^b [f+(-1)g]=\int_a^b f+(-1)\int_a^b g=\int_a^b f-\int_a^b g\,.$$

f) Hamis. Ellenpélda: TK. 8.9. példa a) része.

g) Hamis. Ellenpélda: TK. 8.9. példa b) része.

2. Az alsó, illetve felső integrálközelítő összeg definíciója alapján a C válasz a helyes.

3. A C válasz a helyes, mert
$$\int_0^1 e^x(1-e^x)^4\,dx=\left[-\frac{(1-e^x)^5}{5}\right]_0^1=\frac{(e-1)^5}{5}\,.$$

4. A B válasz a helyes, mert
$$\int_5^7\left|\frac{x-6}{x-4}\right|dx=\int_5^6\left(-\frac{x-6}{x-4}\right)dx+\int_6^7\frac{x-6}{x-4}\,dx=-\int_5^6\frac{x-4-2}{x-4}\,dx+\int_6^7\frac{x-4-2}{x-4}\,dx=$$
$$=-\int_5^6\left(1-\frac{2}{x-4}\right)dx+\int_6^7\left(1-\frac{2}{x-4}\right)dx=-\big[x-2\ln|x-4|\big]_5^6+\big[x-2\ln|x-4|\big]_6^7=$$
$$=4\ln 2-2\ln 3\,.$$

5. Az A válasz a helyes, mert
$$\int_{-2}^1(9-8x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[-\frac{\sqrt{9-8x}}{4}\right]_{-2}^1=1\,.$$

6. A B válasz a helyes, mert
$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{9-8x}}\,dx=\left|\begin{array}{ll} t=\sqrt{9-8x} & x=0\\ t^2=9-8x & \Downarrow\\ x=\dfrac{9}{8}-\dfrac{t^2}{8} & t=3\\ \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{t}{4} & x=1\\ & \Downarrow\\ dx=-\dfrac{t}{4}\,dt & t=1\end{array}\right|=\int_3^1\frac{\frac{9}{8}-\frac{t^2}{8}}{t}\left(-\frac{t}{4}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{32}\int_1^3 (9-t^2)\,dt=\frac{1}{32}\left[9t-\frac{t^3}{3}\right]_1^3=\frac{1}{32}\cdot\frac{28}{3}=\frac{7}{24}.$$

7. A B válasz a helyes, ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_1^{\infty} A\left(\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^6}\right)dx=A\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right]_1^b=A\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^3}-\frac{1}{b^5}+2\right)=$$

$$=2A=1 \;\Rightarrow\; A=\frac{1}{2}.$$

8. A B válasz a helyes, mert

$f(x)<0$ az $[1\,;\,e]$ intervallumban, így

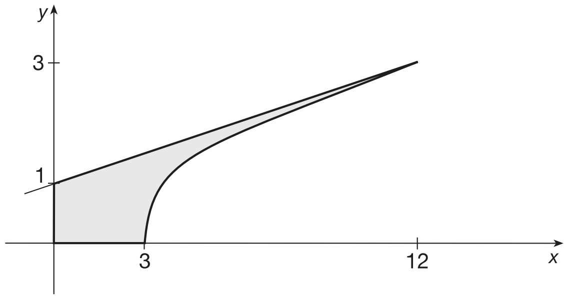
$$T=\int_1^e\left[-(\ln x-1)\right]dx=\left[x-x\ln x+x\right]_1^e=e-2.$$

(Az $x\mapsto \ln x$ függvényt parciálisan integráltuk.)

9. Az A válasz a helyes.

A $P_0(12\,;\,3)$ ponthoz tartozó érintő egyenlete: $y=\frac{1}{6}x+1$.

Tekintsük az M 113. ábrát!



M 113. ábra

$$T=\int_0^{12}\left(\frac{1}{6}x+1\right)dx-\int_3^{12}\sqrt{x-3}dx=\left[\frac{x^2}{12}+x\right]_0^{12}-\left[\frac{2}{3}(\sqrt{x-3})^3\right]_3^{12}=6.$$

9. Többváltozós függvények

9.1 Kétváltozós függvények. Szintvonalak

234. A megadott kétváltozós függvények természetes értelmezési tartománya mindig $\mathbf{R}^2$-nek valamely részhalmaza. Az egyes értelmezési tartományokat meghatározó feltételeket alább felsoroljuk, a megfelelő tartományokat pedig az M 114. ábrák mutatják.

a) és c) $D_f = \mathbf{R}^2$

b) $x \geq 0, \quad y \in \mathbf{R}$

d) $x, y \in \mathbf{R}$ és $y \neq 3 - 2x$

e) $x > 3$ és $y < 4$ vagy $x < 3$ és $y > 4$

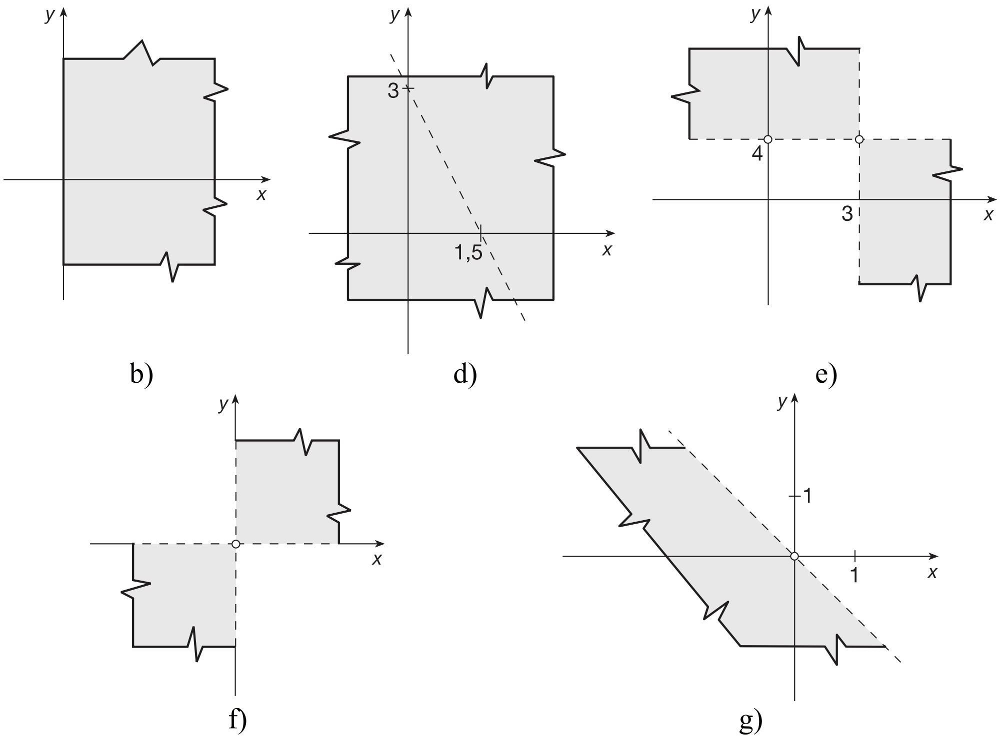
f) $x > 0$ és $y > 0$ vagy $x < 0$ és $y < 0$

g) $x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}$ és $y < -x$

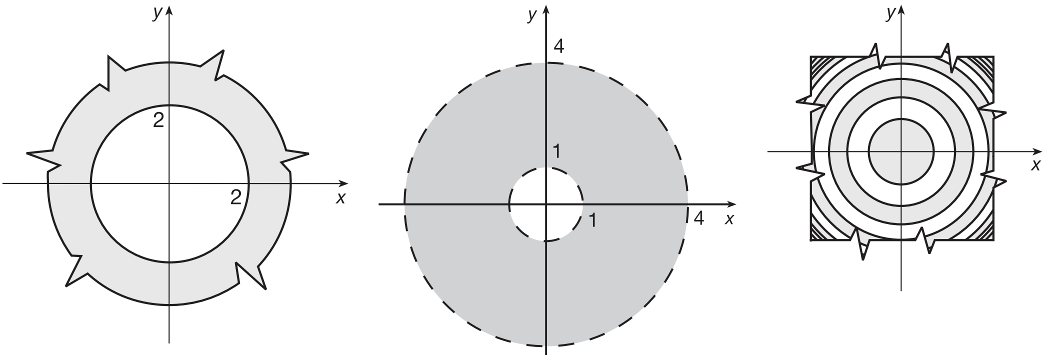
h) $x, y \in \mathbf{R}$ és $x^2 + y^2 \geq 2^2$

i) $x, y \in \mathbf{R}$ és $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4^2$

j*) $x, y \in \mathbf{R}$ és $2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$



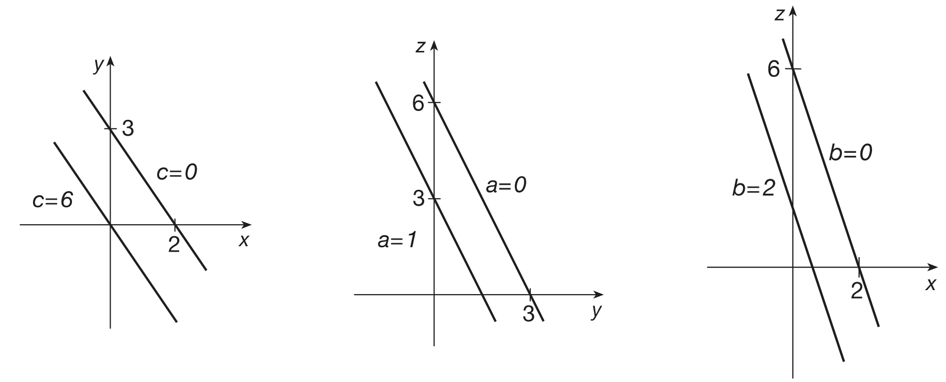
M114. ábra



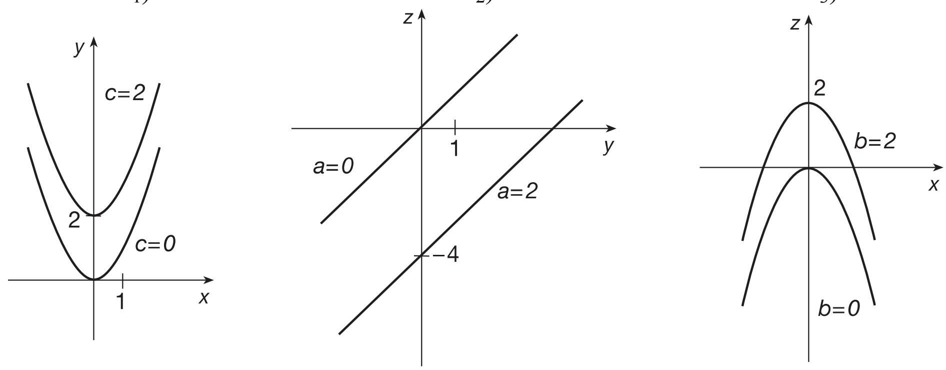
h) i) j*)

M114. ábra folytatás

235. A szintvonalakat az M 115., a felületeket pedig az M 116. ábrák szemléltetik.

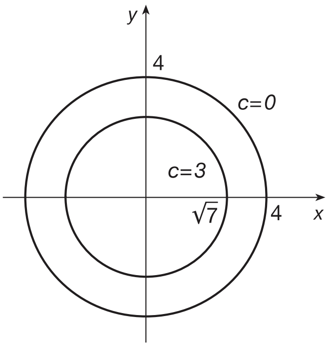


a_1) a_2) a_3)

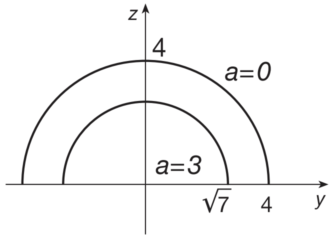


b_1) b_2) b_3)

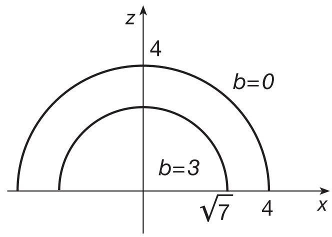
M115. ábra



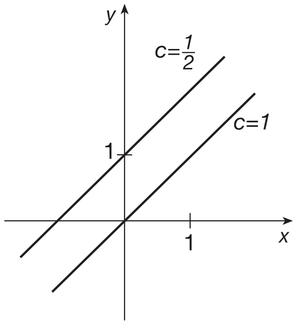
c_1)



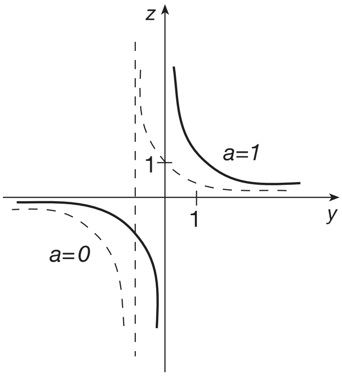
c_2)



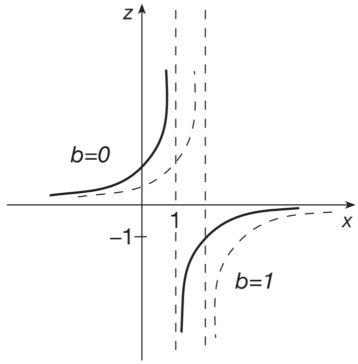
c_3)



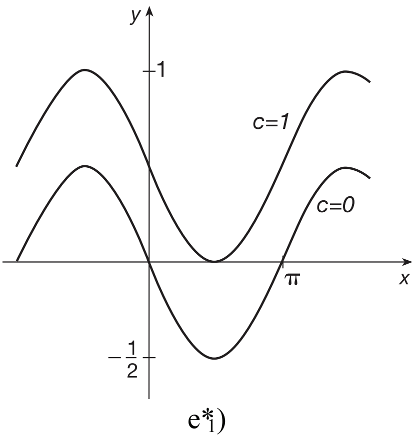
d_1)



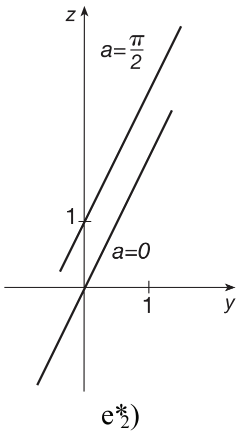
d_2)



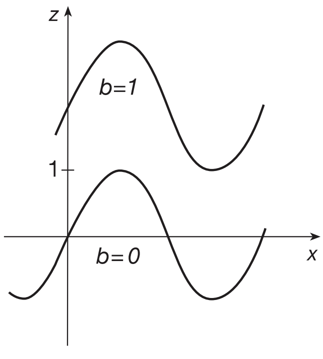
d_3)



e^*_1)

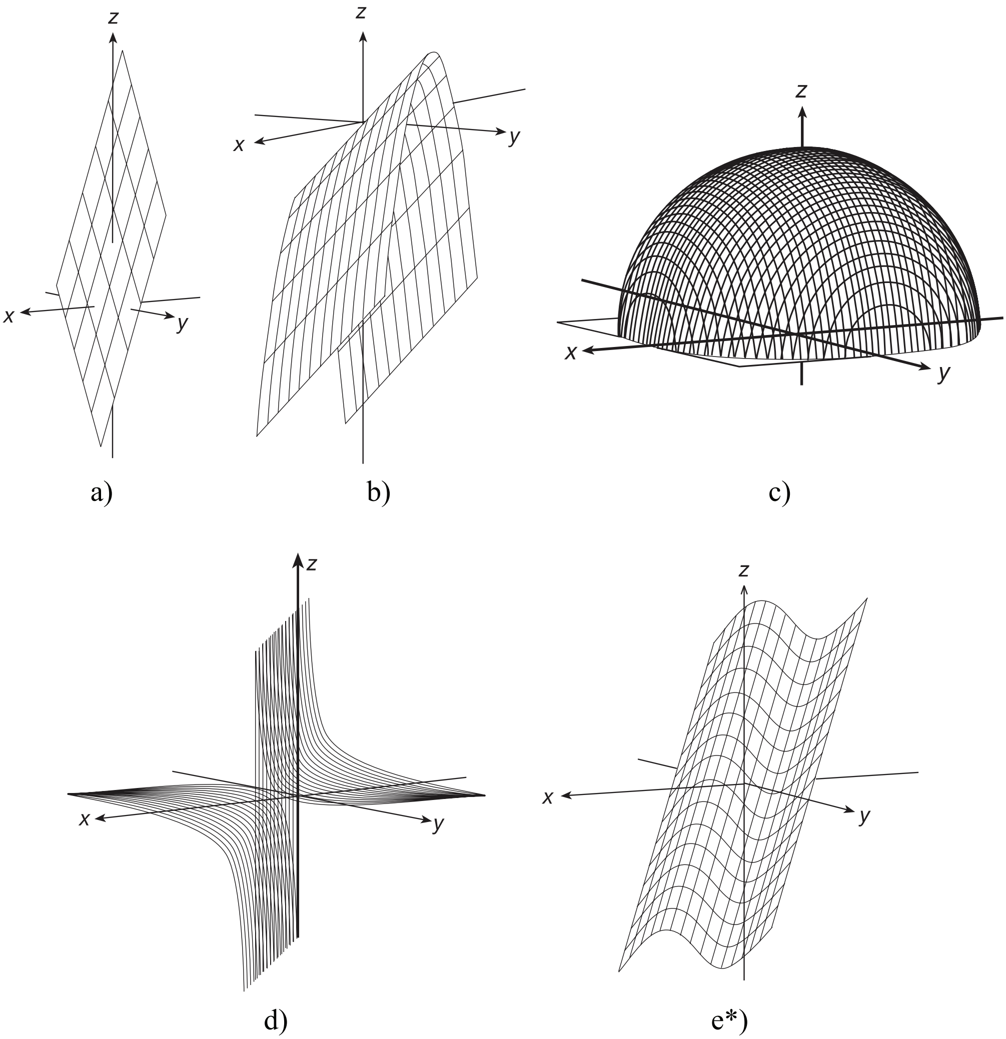


e^*_2)



e^*_3)

M115. ábra folytatás



M 116. ábra

236. a) $f_1(x) = f(x\,;\,0) = 2x^7$, $\quad f_2(y) = f(1\,;\,y) = 2 + 3y^4 - 10y$

b) $f_1(x) = f(x\,;\,1) = \ln(x^2+1)$, $\quad f_2(y) = f(0\,;\,y) = \ln y^2$

c) $f_1(x) = f(x\,;\,-3) = -3^{4x+1}$, $\quad f_2(y) = f(0\,;\,y) = \dfrac{3}{y+2}$

d*) $f_1(x) = f(x\,;\,3) = 3e^{\cos x}$, $\quad f_2(y) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,y\right) = 2y - 3$

237. $f_2(y) = \dfrac{2y}{y^2+1}$,

$f_2'(y) = \dfrac{2-2y^2}{(y^2+1)^2}$, $\quad f_2'(y) = 0,$ ha $y = \pm 1$.

$f_2''(y) = \dfrac{4y^3-12y}{(y^2+1)^3}$, $\quad f_2''(y) = 0$, ha $y = 0$ vagy $y = \pm\sqrt{3}$.

	$y<-1$	$y=-1$	$-1<y<1$	$y=1$	$y>1$
f_2':	–	0	+	0	–
f_2:	↘	l. min. $f_2(-1)=-1$	↗	l. max. $f(1)=1$	↘

M 49. táblázat

	$y<-\sqrt{3}$	$y=-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<y<0$	$y=0$	$0<y<\sqrt{3}$	$y=\sqrt{3}$	$y>\sqrt{3}$
f_2'':	–	0	+	0	–	0	+
f_2:	$\frown$	infl. pont	$\smile$	infl. pont	$\frown$	infl. pont	$\smile$

M 50. táblázat

238. a) $f_1(x) = 2x-4$, $\quad f_1'(x) = 2$, $\quad f_1'(4) = 2 = m_1$.

$f_2(y) = 8 - y^2$, $\quad f_2'(y) = -2y$, $\quad f_2'(2) = -4 = m_2$.

b) $f_1(x) = e^{-2x^2}$, $\quad f_1'(x) = e^{-2x^2}\cdot(-4x)$, $\quad f_1'(-1) = 4e^{-2} = m_1$.

$f_2(y) = e^{3y^3-2}$, $\quad f_2'(y) = e^{3y^3-2}\cdot(9y^2)$, $\quad f_2'(0) = 0 = m_2$.

239. a) $f_1(x) = 16 - 4x^4 - 6x^2$, $\quad f_1'(x) = -16x^3 - 12x$, $\quad f_1'(1) = -28 = m_1$, $f_1(1) = 6$, így a $P_1(1\,;\,6)$ ponthoz tartozó m_1 meredekségű érintő egyenlete: $z = -28x + 34$, $y = -2$.

$f_2(y) = 4 + 3y + 2y^2$, $\quad f_2'(y) = 3 + 4y$, $\quad f_2'(-2) = -5 = m_2$, $f_2(-2) = 6$, így a $P_2(-2\,;\,6)$ ponthoz tartozó m_2 meredekségű érintő egyenlete: $z = -5y - 4$, $x = 1$.

b) Az a) ponthoz hasonlóan adódik:

$f_1(x) = \dfrac{2\ln x}{x+2}$, $\quad z = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$, $\quad y = 2$.

$f_2(y) = 0$, $\quad z = 0$, $\quad x = 1$.

9.2 Parciális deriváltak

240. a) $f'_x(x\,;\,y) = 10x + 8xy^2$, $\quad f'_y(x\,;\,y) = 6y + 8x^2y$

b) $f'_x(x\,;\,y) = \dfrac{\frac{1}{3}(x^4+3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3}{2y^7+y+3}$, $\quad f'_y(x\,;\,y) = \sqrt[3]{x^4+3} \cdot \dfrac{-(14y^6+1)}{(2y^7+y+3)^2}$

c) $f'_x(x\,;\,y) = e^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} y^3(2+y)^4$, $\quad y \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^+$,

$f'_y(x\,;\,y) = e^{\sqrt{x}} \cdot \left[3y^2(2+y)^4 + y^3 \cdot 4(2+y)^3\right]$

d) $f'_x(x\,;\,y) = \dfrac{9x^2y}{\left(3x^3y + \sqrt[4]{y^3}\right)\ln 2}$, $\quad f'_y(x\,;\,y) = \dfrac{3x^3 + \frac{3}{4}y^{-\frac{1}{4}}}{\left(3x^3y + \sqrt[4]{y^3}\right)\ln 2}$

e) $f'_x(x\,;\,y) = \dfrac{5y^4(3x+4yx^3) - (4y+5xy^4)(3+12yx^2)}{(3x+4yx^3)^2}$,

$f'_y(x\,;\,y) = \dfrac{(4+20xy^3)(3x+4yx^3) - (4y+5xy^4)4x^3}{(3x+4yx^3)^2}$

f) $f'_x(x\,;\,y) = \dfrac{2xy}{x^2y} + e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \dfrac{1}{y^2}$, $\quad f'_y(x\,;\,y) = \dfrac{x^2}{x^2y} + e^{\frac{x}{y^2}} \cdot \left(-\dfrac{2x}{y^3}\right)$

g*) $f'_x(x\,;\,y) = 10^{\cos x} \cdot (\ln 10)(-\sin x) \cdot \sin(5 \cdot \sqrt[4]{x} - 6xy^2) +$

$+10^{\cos x} \cdot \left[\cos(5 \cdot \sqrt[4]{x} - 6xy^2)\right]\left(\dfrac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 6y^2\right)$, $\quad x > 0$, $\quad 0 \neq y \in \mathbf{R}$,

$f'_y(x\,;\,y) = 10^{\cos x} \cdot \left[\cos(5 \cdot \sqrt[4]{x} - 6xy^2)\right](-12xy)$

241. Az adott függvények 3 változósak. Valamelyik változó szerinti parciális derivált előállításakor a másik két változót állandónak tekintjük.

a) $f'_x(x\,;\,y\,;\,z) = e^y \ln z$, $\quad f'_y(x\,;\,y\,;\,z) = xe^y \ln z$, $\quad f'_z(x\,;\,y\,;\,z) = \dfrac{xe^y}{z}$

b) $f'_x(x\,;\,y\,;\,z) = \dfrac{y^2}{2+z^5}$, $\quad f'_y(x\,;\,y\,;\,z) = \dfrac{2xy}{2+z^5}$,

$f'_z(x\,;\,y\,;\,z) = -\dfrac{5xy^2z^4}{(2+z^5)^2}$

c) $f'_x(x\,;\,y\,;\,z) = yz \cdot x^{yz-1} + \dfrac{2}{2x+3y+4z}$,

$$f'_y(x\,;\,y\,;\,z)=x^{yz}\cdot(\ln x)z+\frac{3}{2x+3y+4z},$$

$$f'_z(x\,;\,y\,;\,z)=x^{yz}(\ln x)y+\frac{4}{2x+3y+4z}$$

d) $$f'_x(x\,;\,y\,;\,z)=z\cdot 2^{-3x^2y}(\ln 2)(-6xy)+\frac{z+2}{(x+1)\ln 10}\cdot\frac{1}{z+2},$$

$$f'_y(x\,;\,y\,;\,z)=z\cdot 2^{-3x^2y}(\ln 2)(-3x^2),$$

$$f'_z(x\,;\,y\,;\,z)=2^{-3x^2y}+\frac{z+2}{(x+1)\ln 10}\cdot(x+1)\frac{-1}{(z+2)^2}$$

242. a) $f'_x(x\,;\,y)=21x^6-10x^4y+5y^2$; $\quad f'_x(1\,;\,2)=21$

$f'_y(x\,;\,y)=-2x^5+10xy-6y^5$; $\quad f'_y(1\,;\,2)=-174$

b) $f'_x(x\,;\,y)=5(\sqrt{x}+x^2y)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2xy\right)$, $\quad x>0,\ y\in\mathbf{R}$, $\quad f'_x(1\,;\,0)=\dfrac{5}{2}$

$f'_y(x\,;\,y)=5(\sqrt{x}+x^2y)^4x^2$; $\quad f'_y(1\,;\,0)=5$

c*) $f'_x(x\,;\,y)=8x^3\cdot\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{2x^4}{y}\sin\dfrac{x}{y}$; $\quad f'_x(\pi\,;\,1)=-8\pi^3$

$f'_y(x\,;\,y)=\dfrac{2x^5}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}$; $\quad f'_y(\pi\,;\,1)=0$

243. a) $f''_{xx}(x\,;\,y)=-6y^3+12x$, $\quad f''_{yy}(x\,;\,y)=2x-18x^2y$,

$f''_{xy}(x\,;\,y)=f''_{yx}(x\,;\,y)=2y-18xy^2$

b) $f''_{xx}(x\,;\,y)=y^2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\quad f''_{yy}(x\,;\,y)=x^2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$,

$f''_{xy}(x\,;\,y)=f''_{yx}(x\,;\,y)=-xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

c) $f''_{xx}(x\,;\,y)=5^{x^2y^3}(\ln^2 5)(2xy^3)^2+5^{x^2y^3}(\ln 5)\,2y^3$,

$f''_{yy}(x\,;\,y)=5^{x^2y^3}(\ln 5)^2\,9x^4y^4+5^{x^2y^3}(\ln 5)\,6x^2y$,

$f''_{xy}(x\,;\,y)=f''_{yx}(x\,;\,y)=5^{x^2y^3}(\ln 5)^2\,6x^3y^5+5^{x^2y^3}(\ln 5)\,6xy^2$

d) Térjünk át e alapú logaritmusra!

$$\log_y x=\frac{\ln x}{\ln y}$$

$$f''_{xx}(x\,;\,y)=\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{-1}{x^2},$$

$$f''_{yy}(x\,;\,y) = (\ln x)\left[2(\ln y)^{-3}\cdot\frac{1}{y^2} + (\ln y)^{-2}\cdot\frac{1}{y^2}\right],$$

$$f''_{xy}(x\,;\,y) = f''_{yx}(x\,;\,y) = \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{\ln^2 y}\cdot\frac{1}{y}$$

244. $f''_{xy}(x\,;\,y)$ és $f''_{yx}(x\,;\,y)$ az alábbi kifejezéssel egyenlő:

a) $90xy^4 + 4$

b) $e^{x+\frac{x^3}{y}}\left(-\frac{x^3}{y^2}\right)\left(1+\frac{3x^2}{y}\right) + e^{x+\frac{x^3}{y}}\left(-\frac{3x^2}{y^2}\right)$

c) 0

d) $-3\left[(28y^6+3y^2)(3x+y)^{-2} + (4y^7+y^3)(-2)(3x+y)^{-3}\right]$

245. a) $f'''_{xyy}(x\,;\,y) = 12xy$, $\quad f^{(4)}_{xxxx}(x\,;\,y) = -48y + 360x$

b) $f'''_{xxy}(x\,;\,y) = \dfrac{2}{x^3 y}$, $\quad f'''_{yyy}(x\,;\,y) = \dfrac{2}{xy^3}$

c) $f'''_{xyz}(x\,;\,y\,;\,z) = 2x3y^2 4z^3 e^{x^2+y^3+z^4}$,

$f'''_{xxz}(x\,;\,y\,;\,z) = (4x^2+2)e^{x^2+y^3+z^4}\cdot(4z^3)$

d*) $f^{(5)}_{xxxxy}(x\,;\,y\,;\,z) = -96y\sin(2x+3y^2+4z^3)$,

$f^{(4)}_{xxxz}(x\,;\,y\,;\,z) = 96z^2\cdot\cos(2x+3y^2+4z^3)$

9.3 Kétváltozós függvények szélsőértéke

246. a) Nyeregpont: $(2\,;\,2)$; lokális maximumhely: $(0\,;\,0)$.

b) Nyeregpont: $(0\,;\,0)$; lokális minimumhely: $(-4\,;\,2)$.

c) Nyeregpont: $(0\,;\,0)$; lokális minimumhely: $(72\,;\,24)$.

d) Nyeregpont: $(0\,;\,0)$; lokális maximumhely: $(-2\,;\,-6)$.

e) Lokális minimumhely: $(1\,;\,3)$.

f) Lokális minimumhely: $(-2\,;\,-1)$.

g) Lokális minimumhely: $(3\,;\,2)$.

h) Nyeregpont: $(0\,;\,0)$; lokális maximumhelyek: $(1\,;\,1)$ és $(-1\,;\,-1)$.

i) Nyeregpontok: $(0\,;\,-\sqrt{8})$ és $(0\,;\,\sqrt{8})$;
lokális minimumhely: $(2\,;\,3)$, lokális maximumhely: $(-2\,;\,-3)$.

j▲) A stacionárius pontokat a

$$\left.\begin{array}{r} 2(x-y+1)=0 \\ -2(x-y+1)=0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. Mivel az egyik egyenlet a másiknak konstansszorosa, ezért mindkét egyenletet ugyanannak az $y=x+1$ egyenletű egyenesnek a pontjai elégítik ki. Tehát a stacionárius pontok az $y=x+1$ egyenes pontjai.

A másodrendű parciális deriváltak most állandók:

$f''_{xx}(x\,;\,y)=2$, $\quad f''_{yy}(x\,;\,y)=2$, $\quad f''_{xy}(x\,;\,y)=-2$,

és $D(x\,;\,y)=2\cdot 2-(-2)^2=0$ minden stacionárius pontban, vagyis további vizsgálatra van szükség.

Könnyen belátható, hogy az $y=x+1$ egyenes minden pontja minimumhelye a függvénynek, ugyanis $f(x\,;\,y)=(x-y+1)^2\geq 0$ és a függvény csak az $y=x+1$ egyenes pontjaiban vesz fel 0 értéket.

k) Nyeregpontok: $(-1\,;\,1)$ és $(1\,;\,1)$.

l) Lokális minimumhelyek: $(1\,;\,1)$ és $(-1\,;\,1)$.

m) $f'_x(x\,;\,y)=e^y\neq 0 \quad\Rightarrow$ nincsenek lokális szélsőértékhelyek és nyeregpontok.

n) $f'_x(x\,;\,y)=2xe^y$, $\quad f'_y(x\,;\,y)=e^y(1+x^2+y)$

A $$\left.\begin{array}{r} 2xe^y=0 \\ e^y(1+x^2+y)=0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer egyetlen megoldása: az $S(0\,;\,-1)$ stacionárius pont.

$f''_{xx}(x\,;\,y)=2e^y$, $\quad f''_{yy}(x\,;\,y)=e^y(2+x^2+y)$, $\quad f''_{xy}(x\,;\,y)=2xe^y$

$$D(0\,;\,-1)=f''_{xx}(0\,;\,-1)\cdot f''_{yy}(0\,;\,-1)-\left[f''_{xy}(0\,;\,-1)\right]^2=$$

$$=\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e}-0^2=\frac{2}{e^2}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{az } S(0\,;\,-1) \text{ lokális szélsőértékhely.}$$

$$f''_{xx}(0\,;\,-1)=\frac{2}{e}>0 \quad\Rightarrow\quad \text{az } S(0\,;\,-1) \text{ pont lokális minimumhely.}$$

247. a) A P_0 pontban nincs lokális szélsőérték; P_0 nyeregpont.

b) A P_0 pontban lokális minimuma van a függvénynek.

c) A P_0 pont nem lokális szélsőértékhely, ugyanis : $f'_x(3\,;\,-1)=-\dfrac{6}{5}\neq 0$.

d*) A P_0 pontban nincs lokális szélsőérték, P_0 nyeregpont.

248. Jelölje a téglatest éleinek hosszát: x, y és $15-(x+y)$.

Így a térfogat: $V = xy\left[15-(x+y)\right]$.
Feladatunk a $V(x\ ;\ y) = xy(15-x-y)$, $0 < x,\ y < 15$
kétváltozós függvény abszolút maximumhelyének megkeresése.
E függvény az $x = 5$ és $y = 5$ értékek esetén veszi fel a maximális értékét.
Ekkor a téglatest mindhárom éle 5 egység hosszúságú.

249. Jelölje a tagokat: x, y és $12-(x+y)$.
Ekkor az
$f(x\ ;\ y) = x^2 + y^2 + (12-x-y)^2$, $0 < x,\ y < 12$
függvény abszolút minimumhelyét kell meghatározni.
A megoldás: $x = y = 4$; ekkor a harmadik tag is 4.

250. Feltételezzük, hogy akkor kell a legkevesebb anyagot felhasználni, ha a medence felszíne a lehető legkisebb. Jelölje a medence alaplapjának oldalhosszúságait x és y, a medence mélységét pedig z.
A medence (téglatest) térfogata: $4 = xyz$. Innen: $z = \dfrac{4}{xy}$.
Így a felszín: $F = xy + 2x\dfrac{4}{xy} + 2y\dfrac{4}{xy} = xy + \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x}$.
Feladatunk az $F(x\ ;\ y) = xy + \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x}$, $0 < x,\ y \in \mathbf{R}$
kétváltozós függvény abszolút minimumhelyének megkeresése. E függvény a minimumát az $x = y = 2$ helyen veszi fel. Tehát a medence méretei:
$x = y = 2\,\mathrm{m}$ és $z = 1\,\mathrm{m}$.

251. A C költségfüggvény abszolút minimumhelyét keressük.
$C'_x(x\ ;\ y) = 2x-3y-10$, $C'_y(x\ ;\ y) = -3x+10y-18$.

A $\left.\begin{array}{r} 2x-3y-10=0 \\ -3x+10y-18=0 \end{array}\right\}$

egyenletrendszer megoldása: $S(14\ ;\ 6)$.
$C''_{xx}(x\ ;\ y) = 2$, $C''_{yy}(x\ ;\ y) = 10$, $C''_{xy}(x\ ;\ y) = -3$
$D(14\ ;\ 6) = 2\cdot 10-(-3)^2 = 11 > 0 \;\Rightarrow\; S$ lokális szélsőértékhely.
$C''_{xx}(14\ ;\ 6) = 2 > 0 \;\Rightarrow$ az $S(14\ ;\ 6)$ pont lokális minimumhely; ez egyben az abszolút minimumhely is. Tehát a költség akkor minimális, ha az első termékből 14 tonnát, a másodikból pedig 6 tonnát állítanak elő. Ekkor a minimális költség: $C(14\ ;\ 6) = 26$ (millió Ft).

252. A profitfüggvény abszolút maximumhelyét keressük, figyelembe véve, hogy x és y csak nemnegatív értékeket vehet fel.
Először a lokális maximumhelyet (vagy helyeket) határozzuk meg. Mivel

$$P'_x(x\,;\,y) = 12 - 2x \quad \text{és} \quad P'_y(x\,;\,y) = 8 - 2y\,,$$

ezért a

$$\left.\begin{aligned} 12 - 2x &= 0 \\ 8 - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a stacionárius pontot: $S(6\,;\,4)$.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$P''_{xx}(x\,;\,y) = -2\,, \qquad P''_{yy}(x\,;\,y) = -2\,, \qquad P''_{xy}(x\,;\,y) = 0\,.$$

$D(6\,;\,4) = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Az S pont lokális szélsőértékhely,
s mivel $P''_{xx}(6\,;\,4) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ az S pont lokális maximumhely.
Belátható, hogy ez egyben az abszolút maximumhely is.
Tehát a vállalatnak akkor lesz maximális a profitja, ha kutatásra 6 millió forintot, reklámozásra pedig 4 millió forintot költ évente.
Ekkor a maximális profit nagysága: 42 millió forint. $\big(P(6\,;\,4) = 42\big)$.

253. $s = 100$ és $q = 300$.

254. Az f függvénynek a $P(1\,;\,2)$ pontban abszolút minimuma van. A minimum értéke, azaz a legmélyebb pont tengerszint feletti magassága: $f(1\,;\,2) = 0$. Tehát ez a térkép a meteorit kráter térképe.

9.4* Feltételes szélsőérték

255. a) Maximum érték: $f(1\,;\,1) = 1$; minimum nincs.

b) Minimum érték: $f\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; maximum nincs.

c) Minimumérték: $f(-1\,;\,-1) = f(1\,;\,1) = 2$; maximum nincs.

256. a) $F(x\,;\,y\,;\,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 2)$

$$F'_x(x\,;\,y\,;\,\lambda) = y + \lambda$$

$$F'_y(x\,;\,y\,;\,\lambda) = x + \lambda$$

Az
$$\left.\begin{aligned} y + \lambda &= 0 \\ x + \lambda &= 0 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása: $x=1$, $y=1$, $\lambda=-1$.
Tehát egy lehetséges szélsőérték pont van: $P(1\,;1\,;1)$.

b) $P\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

c) $P_1(1\,;1\,;2)$ és $P_2(-1\,;-1\,;2)$

d) $P(2\,;2\,;8)$

e) $P(1\,;-1\,;-1)$

f) $P_1\left(4\,;4\,;\frac{1}{2}\right)$ és $P_2\left(-4\,;-4\,;-\frac{1}{2}\right)$

g) $P(0\,;0\,;1)$

h) $P(1\,;2\,;5)$

i) $P_1(-1\,;1\,;-3)$ és $P_2(1\,;-1\,;5)$

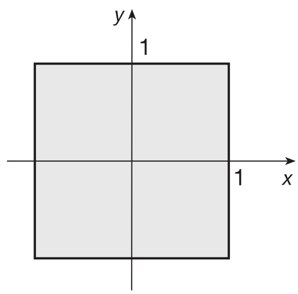
j) $P_1(2\,;5\,;-39)$ és $P_2(-2\,;-5\,;45)$

k) $P_1(-6\,;5\,;-15)$ és $P_2(6\,;-5\,;11)$

l) $P_1(-1\,;-1\,;-2)$ és $P_2(1\,;1\,;2)$

9.5 Vegyes feladatok

257. a) $|x|\le 1$ és $|y|\le 1$



M. 117. ábra

b) $f_1(x)=f\left(x\,;\frac{1}{4}\right)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-\frac{1}{4^2}}=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\frac{15}{16}}$

$f_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad f_1'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}=m_1$.

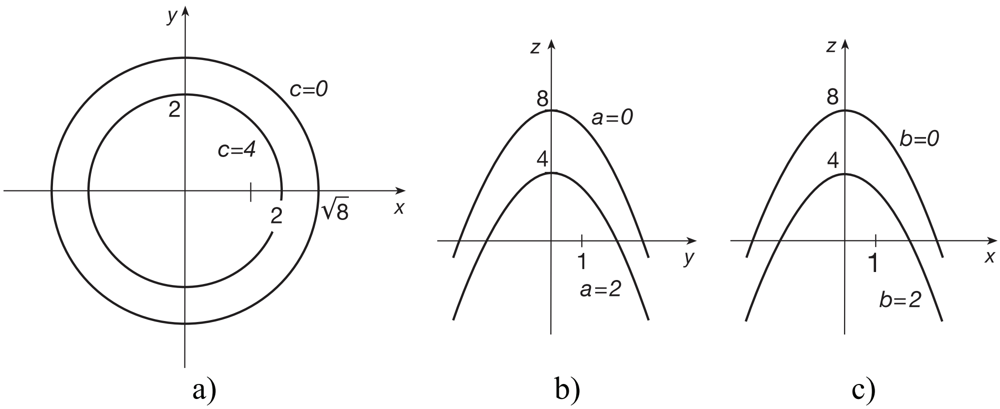
$f_2(y)=f\left(\frac{1}{2}\,;y\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{1-y^2}$

$$f_2'(y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_2'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}} = m_2 .$$

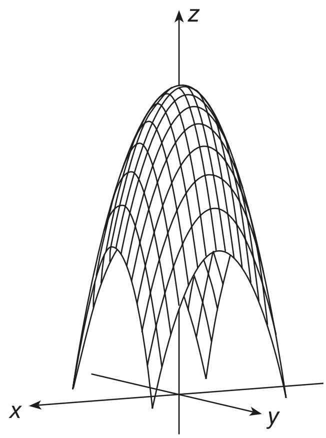
c) $$f_x'(x\,;\,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f_x'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

$$f_y'(x\,;\,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad f_y'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}} .$$

258. A szintvonalakat az M 118. ábra, a felületet pedig az M 119. ábra szemlélteti.



M. 118. ábra



M. 119. ábra

259. $f_1(x) = 2^{x+x^2}$, $\quad f_1'(x) = 2^{x+x^2}(\ln 2)(1+2x)$, $\quad f_1'(x) = 0$, ha $x = -\dfrac{1}{2}$.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$
f_1':	$-$	0	+
f_1:	$\searrow$	lok. és absz. min	$\nearrow$

M 51. táblázat

f_1-nek sem lokális, sem abszolút maximuma nincs, mert $\lim\limits_{\pm\infty} f_1(x) = \infty$.

$f_2(y) = 2^{2y+4}$, $\quad f_2'(y) = 2^{2y+4}(\ln 2)\cdot 2 > 0 \;\Rightarrow\; f_2$ szigorúan monoton növekedő **R**-en $\;\Rightarrow\;$ se minimuma, se maximuma nincs.

260. $f_x'(x\,;\,y) = 3^{7xy^4+\sqrt[5]{x^3}}\cdot(\ln 3)\left(7y^4 + \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)$, $\quad y \in \mathbf{R}$, $\; x \in \mathbf{R} - \{0\}$,

$f_y'(x\,;\,y) = 3^{7xy^4+\sqrt[5]{x^3}}\cdot(\ln 3)\,28xy^3$

$f_x'(1\,;\,0) = \dfrac{9}{5}\ln 3$, $\qquad f_y'(1\,;\,0) = 0$.

261. $f_{xxx}'''(x\,;\,y) = 2^3 y^{2x}(\ln y)^3$, $\qquad f_{yyy}'''(x\,;\,y) = 2x(2x-1)(2x-2)y^{2x-3}$

262. $f_x'(x;\,y) = \dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, $\qquad f_{xy}''(x\,;\,y) = e^x(-1)(e^x+e^y)^{-2}\cdot e^y = -\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$

$f_y'(x\,;\,y) = \dfrac{e^y}{e^x+e^y}$, $\qquad f_{yx}''(x\,;\,y) = e^y(-1)(e^x+e^y)^{-2}\cdot e^x = -\dfrac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$

263. $f_x'(x;\,y) = -2x+8$, $\qquad f_y'(x\,;\,y) = -2y+16$

$$\left.\begin{array}{r} -2x+8=0 \\ -2y+16=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P(4\,;\,8)$$

$f_{xx}''(x\,;\,y) = -2$, $\quad f_{yy}''(x\,;\,y) = -2$, $\quad f_{xy}''(x\,;\,y) = 0$

$D(4\,;\,8) = (-2)(-2) - 0^2 = 4 > 0 \quad\Rightarrow\quad P$ lokális szélsőértékhely.

$f_{yy}''(4\,;\,8) = -2 < 0 \quad\Rightarrow\quad P$ lokális maximumhely, egyben abszolút maximumhely is.

Tehát a vadásznak akkor lesz a legnagyobb a zsákmánya, ha 4 kutyát és 8 hajtót visz magával. A legnagyobb zsákmány: $f(4\,;\,8)=70$ db fácán.

9.6 Ellenőrző kérdések és feladatok

1. a) Hamis; ha ugyanis a függvény felülről nem korlátos, akkor nincs abszolút maximuma.

b) Hamis; ugyanis az $f'_x(x_0\,;\,y_0)=f'_y(x_0\,;\,y_0)=0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges feltétele a lokális szélsőértékhely létezésének az $(x_0\,;\,y_0)$ pontban. Az $(x_0\,;\,y_0)$ pont lehet nyeregpont is. (Lásd TK. 9.2. és 9.3. tételeket!)

c) Igaz; a TK. 9.2. tétel értelmében, ugyanis az $(x_0\,;\,y_0)$ pont nemcsak abszolút, hanem lokális szélsőértékhely is.

d) Hamis a TK. 9.3. tétel értelmében.

2. Nem; ugyanis ez a hozzárendelés nem egyértelmű: egy $(x\,;\,y)$ rendezett számpárhoz két függvényértéket (egy pozitív és egy negatív számot) rendel. Tehát a B válasz a helyes.

3. A C válasz a helyes a

$$9-x^2-y^2>0\,,\ \text{azaz}\ 3^2>x^2+y^2$$

feltétel miatt.

4. Az A válasz a helyes, mert

$$f_1(x)=f(x\,;\,2)=\frac{1}{x^2}\,.$$

5. A B válasz a helyes, mert

$$f_2(y)=f(2\,;\,y)=40y^2-y,\quad f_2'(y)=80y-1,\quad f_2'(1)=79\,.$$

6. A C válasz a helyes, ugyanis a deriválásnál a hányados deriválási szabályát kell alkalmazni az $y=$ állandó feltétel mellett.

7. Az A válasz a helyes, ugyanis

$$f'_x(x\,;\,y)=e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\frac{y^2}{x^2}\,,\qquad f''_{xy}(x\,;\,y)=e^{-\frac{y^2}{x}}\left(-\frac{2y}{x}\right)\frac{y^2}{x^2}+e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\frac{2y}{x^2}=$$

$$=e^{-\frac{y^2}{x}}\left(\frac{2y}{x^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{x}\right)\quad \text{és}\quad f'_y(x\,;\,y)=e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\left(-\frac{2y}{x}\right),$$

$$f''_{yx}(x\,;\,y)=e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\frac{y^2}{x^2}\left(-\frac{2y}{x}\right)+e^{-\frac{y^2}{x}}\cdot\frac{2y}{x^2}=e^{-\frac{y^2}{x}}\left(\frac{2y}{x^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{x}\right).$$

8. A B válasz a helyes.

$f'_x(x\,;\,y)=2-\dfrac{4}{yx^2}$, $\quad f'_y(x\,;\,y)=16y-\dfrac{4}{xy^2}$

$f'_x\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\right)=f'_y\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\right)=0$, vagyis a szükséges feltétel teljesül.

$f''_{xx}(x\,;\,y)=\dfrac{8}{yx^3}$, $\quad f''_{yy}(x\,;\,y)=16+\dfrac{8}{yx^3}$, $\quad f''_{xy}(x\,;\,y)=\dfrac{4}{x^2y^2}$

$D\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot 48-4^2=80 \quad\Rightarrow\quad P_0$ lokális szélsőértékhely.

$f''_{xx}\left(2\,;\,\dfrac{1}{2}\right)=2>0 \quad\Rightarrow P_0$ lokális minimumhely.

9. A C válasz a helyes.
Mivel
$f'_y(x\,;\,y)=3e^{-x}>0$ minden $(x\,;\,y)\in\mathbf{R}^2$ esetén, ezért $f'_y(-2\,;\,2)\neq 0$,
így a P_0 pont nem lokális szélsőértékhely.